Quelques (familles de) matrices remarquables

Terminologie.

I Matrices remarquables dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Il n'est pas nécessaire que le nombre de ligne soit le même que le nombre de colonnes pour définir les matrices suivantes :

- **Matrice nulle**, notée $(0) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrice élémentaire** : la $(i,j)^{\text{ième}}$ matrice élémentaire, notée $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient en ligne i colonne j qui vaut 1.

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{col } j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{lig } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

En notant e_k une matrice colonne dont le $k^{\text{ième}}$ coefficient est 1 et les autres sont nuls, on a $E_{i,j} = e_i \times {}^t e_j$.

II Matrices remarquables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il est nécessaire que le nombre de ligne soit égal au nombre de colonnes pour définir les (familles de) matrices suivantes :

- **Matrice identité**, notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf les coefficients diagonaux qui valent tous 1.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice diagonale** : c'est une matrice dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls. Les coefficients diagonaux sont quelconques (ils peuvent être nuls ou non nuls).

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

• **Matrice triangulaire** : on peut préciser.

⇝ Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice T dont les coefficients strictement en dessous de la diagonale sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i > j, a_{i,j} = 0$. Les autres coefficients sont quelconques.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

⇝ Une **matrice triangulaire supérieure stricte** est une matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i \geqslant j, a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇝ Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice T dont les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i < j, a_{i,j} = 0$. Les autres coefficients sont quelconques.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

C'est la transposée d'une matrice triangulaire supérieure.

⇝ Une **matrice triangulaire inférieure stricte** est une matrice T traingulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i \leqslant j, a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la transposée d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

• **Matrice symétrique ou antisymétrique**

⇝ Une **matrice symétrique** est une matrice S dont les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale : $S = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i, \forall j, a_{j,i} = a_{i,j}$.

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Autrement dit S vérifie ${}^tS = S$.

⇝ Une **matrice antisymétrique** est une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i, \forall j, a_{j,i} = -a_{i,j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit A vérifie ${}^tA = -A$.

Les coefficients diagonaux sont nécessairement nuls puisqu'en prenant $j = i$ on trouve $a_{i,i} = -a_{i,i}$.