Relations de comparaison.

Rappels :

1. « On a $P(n)$ ACR » signifie : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ P(n)$;
2. Pour a fini, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists \epsilon > 0,\ \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[,\ P\big(x\big)$;
3. Pour $a = +\infty$, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists A > 0,\ \forall x \in]A, +\infty[,\ P\big(x\big)$;
4. Pour $a = -\infty$, « on a $P(x)$ au voisinage de a » signifie : $\exists B < 0,\ \forall x \in]-\infty, B[,\ P\big(x\big)$.

I Domination

La relation de domination est le « $\mathcal{O}$ » (lire "grand O") utilisé en complexité.

I.1 Définitions

Définition 1 : Domination pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\left(\dfrac{|u_n|}{|v_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2. Plus généralement, on dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\exists K \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K|v_n|$ ACR.

Lorsque c'est le cas, on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exemples 1

1. On a $n = \mathcal{O}(n^2)$ car $\left(\dfrac{n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée (par exemple par 1).
2. On a $5n+12 = \mathcal{O}(n)$ car $\left(\dfrac{5n+12}{n}\right)_{n\geqslant 1} = \left(5 + \dfrac{12}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est majorée (par exemple par 17).

Exercice 1. Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

Exemples 2

1. A-t-on $n^2 = \mathcal{O}(n)$?

2. A-t-on $n = \mathcal{O}(5n+12)$?

Notation 1

1. On a vu qu'on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ pour « $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ ».
2. On notera aussi $\mathcal{O}(v_n)$ l'ensemble de toutes les suites dominées par $(v_n)_n$.
3. On notera aussi $u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$ pour $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

Exemple 3 : On a $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Expliquer pourquoi.

Définition 2 : Domination pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, on dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsque $\left(\dfrac{|f|}{|g|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée au voisinage de a.
2. En général, on dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'on a $\exists K \geqslant 0,\ |f| \leqslant K|g|$ au voisinage de a.

Lorsque c'est le cas, on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ (ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur a : $f = \mathcal{O}(g)$).

On peut également noter $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$. On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

Exemples 4

1. A-t-on $x = \mathcal{O}_0(x^2)$, a-t-on $x^2 = \mathcal{O}_0(x)$, les deux, aucun des deux ?

2. A-t-on $x = \mathcal{O}_{+\infty}(x^2)$, a-t-on $x^2 = \mathcal{O}_{+\infty}(x)$, les deux, aucun des deux ?

I.2 Propriétés

Dans cette section, on énonce quelques propriétés de la domination. Comme le cas des suites est essentiellement un cas particulier du cas des fonctions (pour $a = +\infty$), on se contente d'énoncer les résultats pour les fonctions, mais ils restent évidemment vrais pour les suites.

Théorème 3 .

La relation de domination (« est dominé par ») est un préordre.

DÉMONSTRATION.

Théorème 4 : Propriétés algébriques de la domination.

La relation de domination

1. absorbe les contantes : si $\lambda \neq 0$ alors $\mathcal{O}_a(\lambda f) = \mathcal{O}_a(f)$;
2. est stable par somme au sens suivant : si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$ alors $f + g = \mathcal{O}_a(|u| + |v|)$;
3. est stable par produit : si $f = \mathcal{O}_a(u)$ et $g = \mathcal{O}_a(v)$ alors $fg = \mathcal{O}_a(uv)$.

Exercice 2. Le montrer.

Remarque 1

Le point 2. est surtout intéressant pour son cas particulier suivant : $\boxed{\text{si } f = \mathcal{O}_a(u) \text{ et } g = \mathcal{O}_a(u) \text{ alors } f + g = \mathcal{O}_a(u)}$.

Exemple 5

On montre facilement que les suites $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{e}^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{2n^2+5}{n^2+n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes dominées par $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.
Avec le point 3., on déduit $\arctan(n)\mathrm{e}^{-n} = \mathcal{O}(1)$, puis, avec le corollaire du point 2., $\arctan(n)\mathrm{e}^{-n} + \frac{2n^2+5}{n^2+n+1} = \mathcal{O}(1)$.

Théorème 5 : Grands O de 0 et de 1.

1. $f = \mathcal{O}_a(1) \Leftrightarrow$ ....

2. $f = \mathcal{O}_a(0) \Leftrightarrow$ ....

DÉMONSTRATION. Il suffit décrire la définition.

Corollaire 6 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n = \mathcal{O}(0)$ ou $f = \mathcal{O}(0)$, <u>c'est très probablement qu'on a fait une erreur</u> !

On en prend acte et on essaie de comprendre où on s'est trompé, on ne laisse pas une horreur pareille sur la copie.

II Négligeabilité

La relation de négligeabilité correspond aux $x^n\varepsilon(x)$ des DL. Cela va se noter avec des « o » (lire "petit o").

II.1 Définitions

Définition 7 : Négligeabilité pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
2. En général, on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\exists(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\left\{\begin{array}{l} u_n = \varepsilon_n v_n \text{ ACR} \\ \varepsilon_n \to 0. \end{array}\right.$

Lorsque c'est le cas, on note $u_n = o(v_n)$.

Exemples 6

1. On a $n = o(n^2)$ car $\left(\dfrac{n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend bien vers 0.
2. On a $5n + 12 \neq o(n)$ car $\left(\dfrac{5n+12}{n}\right)_{n\geqslant 1} = \left(5 + \dfrac{12}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0.

Exercice 3. Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

Notation 2

1. On a vu qu'on note $u_n = o(v_n)$ pour « $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ ».
2. On notera aussi $o(v_n)$ l'ensemble de toutes les suites dominées par $(v_n)_n$.
3. On notera aussi $u_n = v_n + o(w_n)$ pour $u_n - v_n = o(w_n)$.

Exemple 7 : On a $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Expliquer pourquoi.

Définition 8 : Négligeabilité pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si g NSP au voisinage de a, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
2. En général, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varepsilon(x) \end{array} \right.$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0. \end{array} \right.$

Lorsque c'est le cas, on note $f = o_a(g)$ (ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur a : $f = o(g)$).

On peut également noter $f(x) = o_a(g(x))$. On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

Exemple 8 Le DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$ en 0 peut s'écrire $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

II.2 Négligeabilités classiques

Proposition 9 .

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$.

1. $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \Leftrightarrow$ ....
2. $x^\alpha = o_0(x^\beta) \Leftrightarrow$ ....
3. $a^x = \mathcal{O}_{+\infty}(b^x) \Leftrightarrow$ ....

DÉMONSTRATION.

Théorème 10 : Croissances comparées.

Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. $\ln(x)^\beta = o_{+\infty}\left(x^\alpha\right)$
2. $x^\alpha = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right)$
3. $\ln(x)^\beta = o_0\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$
4. $\mathrm{e}^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Ce théorème est une simple **reformulation** des théorèmes de croissance comparée vus dans le cours sur les fonctions usuelles. Nous l'avons donc déjà démontré.

Théorème 11 : Cas des suites.

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $q > 1$. On a :

1. $\ln(n)^\beta = o\left(n^\alpha\right)$
2. $n^\alpha = o\left(q^n\right)$
3. $q^n = o\left(n!\right)$
4. $n! = o\left(n^n\right)$

Démonstration.

II.3 Propriétés

Dans cette section, on énonce pour les fonctions des propriétés de la négligeabilité, bien sûr valables pour les suites.

Théorème 12 .

La relation de négligeabilité (« est négligeable devant ») est transitive.

DÉMONSTRATION.

Théorème 13 : Propriétés algébriques de la négligeabilité.

La relation de négligeabilité

1. absorbe les contantes : si $\lambda \neq 0$ alors $o_a(\lambda f) = o_a(f)$;
2. est stable par somme :
   - i/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(v)$ alors $f + g = o_a(|u| + |v|)$;
   - ii/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(u)$ alors $f + g = o_a(u)$;
3. est stable par produit :
   - i/ si $f = o_a(u)$ et $g = o_a(v)$ alors $fg = o_a(uv)$;
   - ii/ si $f = o_a(u)$ alors $fg = o_a(ug)$.

Exercice 4. Le montrer.

Application 1

Ces propriétés reformulent des résultats utilisés en TACMAS.

Écrites avec le symbole o, elles permettent [1] de mener agréablement des calculs de DL.

• Par exemple, soit à calculer le $DL_3(0)$ de $\sin(2x)$. Comme $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire $\sin(2x) = 2x - \dfrac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + o(8x^3)$. Mais comme les« petit o » absorbent les constantes, on peut passer sans autre forme de procès de cette ligne à $\sin(2x) = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$.

• Soit à calculer le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)\sin(x)$. On a $\ln(1+x)\sin(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \cdots$. Les termes restant dans les $\cdots$ sont soit de la forme λx^n avec $n \geqslant 4$, donc des $o(x^3)$, soit des produits d'un $o(x^3)$ par une expression bornée, qui sont aussi des $o(x^3)$ par stabilité par produit. Les $\cdots$ sont donc une somme de $o(x^3)$, et comme les« petit o » sont stables par somme, c'est un $o(x^3)$, ce qu'on peut écrire directement sans autre forme de procès.

1. Enfin ?

Théorème 14 : Petits o de 0 et de 1.

1. $f = o_a(1) \Leftrightarrow$ ....
2. $f = o_a(0) \Leftrightarrow$ ....

DÉMONSTRATION. Il suffit décrire la définition.

Corollaire 15 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n = o(0)$ ou $f = o(0)$, c'est très probablement qu'on a fait une erreur !

On en prend acte et on essaie de comprendre où on s'est trompé, on ne laisse pas une telle infamie sur la copie.

III Équivalence

On sait que, par exemple, quand x est proche de 0, on a $\sin(x)$ très proche de x. Les physiciens et les SIistes ne se gènent pas pour remplacer l'un par l'autre. On va ici donner un sens précis à cette relation.

III.1 Définitions

Définition 16 : Équivalence pour les suites.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on a $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.
2. En général, on dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\exists(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\begin{cases} u_n = \gamma_n v_n \text{ ACR} \\ \gamma_n \to 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $u_n \sim v_n$.

Exemple 9 On a $3^n - 2^n + \cos(n) \sim 3^n$. En effet, on a $\dfrac{3^n - 2^n + \cos(n)}{3^n} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\cos(n)}{3^n} \to 1$.

Exercice 5. Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

Exemple 10 On a vu en TD que la $n^{\text{ième}}$ intégrale de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Définition 17 : Équivalence pour les fonctions.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I.

1. Si g NSP au voisinage de a, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
2. En général, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \gamma(x) \end{cases}$ telle que $\begin{cases} f(x) = \gamma(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \gamma(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note $f \sim_a g$ (ou $f \sim g$, ou $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$).

Exemple 11 On a $\sin(x) \sim x$ puisqu'on a $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Remarque 2

L'intérêt de la relation d'équivalence est de calculer des équivalents simples pour simplifier l'étude en cours. Un équivalent qui se présente comme une somme n'est certainement pas un équivalent simple, donc est sans intérêt en tant qu'équivalent.

III.2 Équivalents classiques

Proposition 18 : Équivalent d'une fraction rationnelle en 0 et $\pm\infty$.

Soient $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_{n_0} x^{n_0}$ $(a_n, a_{n_0} \neq 0)$ et $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_{m_0} x^{m_0}$ $(b_n, b_{m_0} \neq 0)$ deux polynômes.

1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim_{\pm\infty}$ .... ;
2. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim_{0}$ .... ;

Démonstration. • En $\pm\infty$:

• En 0 :

Remarque 3

En particulier, pour un polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_{n_0} x^{n_0}$ $(a_n, a_{n_0} \neq 0)$, on obtient :

Définition 19 : Série harmonique.

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_n$ s'appelle la série harmonique.

Certains ont déjà vu comment comparer H_n à une intégrale. Le théroème suivant montre que cette technique est essentielle.

Théorème 20 : Série harmonique.

On a $H_n \sim \ln(n)$.

Démonstration. Suivez bien !

Théorème 21 : Formule de Stirling.

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

Ok, c'est quoi cette formule de dingue ? D'où il sort ce 2π ? Et ce $\mathrm{e}(= \exp(1))$? Non mais c'est un truc de ouf malade !

DÉMONSTRATION. Bon, on n'a pas assez de background. Admis provisoirement. Ça nous fait au moins une bonne raison de faire le cours sur les séries. On pourra voir l'application 2 pour voir comment on utilise la formule.

III.3 Propriétés

Dans cette section, on énonce pour les fonctions des propriétés de l'équivalence, bien sûr valables pour les suites.

Théorème 22 .

La relation d'équivalence (« est équivalente à ») est... une relation d'équivalence. Eh oui.

DÉMONSTRATION.

Théorème 23 : Propriétés algébriques de l'équivalence.

La relation d'équivalence

1. est stable par produit : si $f \sim u$ et $g \sim v$ alors $fg \sim uv$;
2. est stable par quotient : si $f \sim u$, $g \sim v$ et v ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{u}{v}$;
3. est stable par puissance constante : si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$.

Démonstration. On se contente du cas où les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a :

En cas particulier du point 1., si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \sim g$, alors $\lambda f \sim \lambda g$.

Attention !

1. Si α n'est pas constant, ça ne marche pas ! Donner un contre-exemple :

2. Les équivalents ne sont pas stables par somme ! Donner un contre-exemple :

3. Les équivalents ne sont pas stables par passage à l'exponentielle ! Donner un contre-exemple :

Application 2

Donner un équivalent simple de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$. En déduire sa limite.

Théorème 24 : Équivalents constants.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \sim \ell \Leftrightarrow$ ....

2. $f \sim 0 \Leftrightarrow$ ....

DÉMONSTRATION. Il suffit décrire la définition.

Corollaire 25 : Zone rouge.

Si on est amené à écrire $u_n \sim 0$ ou $f \sim 0$, c'est très probablement qu'on a fait une erreur !

On en prend acte et on essaie de comprendre d'où vient le bug, on ne laisse pas ce genre d'atrocités sur la copie.

III.4 Lien avec la négligeabilité.

Cette sous-section est essentielle pour bien comprendre la section suivante.

Théorème 26 : lien avec la négligeabilité.

$$\begin{aligned} f \sim_a g \quad &\Leftrightarrow \quad f = g + o_a(g) \\ &\Leftrightarrow \quad f = g + o_a(f) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

Comme l'équivalence est une relation d'équivalence (donc symétrique), il suffit de montrer la première équivalence [2]. On traite seulement le cas des fonctions qui ne s'annulent pas.

2. Ça fait beaucoup de notions d'équivalence cette histoire.

On a déjà vu que si f a un $DL_n(0)$, celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n_0} x^n + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Corollaire 27 .

Tout DL est équivalent à son premier terme non nul s'il en existe un.
Autrement dit si a_{n_0} est le premier a_i non nul dans l'expression précédente, alors $f(x) \sim_0 a_{n_0} x^{n_0}$.

DÉMONSTRATION.

Application 3

On retrouve $\sin(x) \sim_0 x$ car ....

On obtient de même :

$\ln(1+x) \sim_0$ ....

$\arctan(x) \sim_0$ ....

$\cos(x) - 1 \sim_0$ ....

etc.

IV Développement asymptotiques

L'idée est la suivante : un DL donne **strictement** plus d'information qu'un équivalent.

Par exemple de $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on déduit $\operatorname{sh}(x) \sim_0 x$, mais on a aussi $\operatorname{sh}(x) \sim_0 x + \frac{x^2}{42}$, et le $\frac{x^2}{42}$ est un pur parasite ne donnant aucune information[3] sur $\operatorname{sh}(x)$.

On va maintenant généraliser la notion de développement limité.

Définition 28 : Développement asymptotique.

On notera DA pour « développement asymptotique ».

1. On appelle DA à un terme de f en a une expression de la forme $f = g + o_a(g)$ où g est un équivalent **simple**[a] de f.
2. On appelle DA à deux termes de f en a une expression de la forme $f = g + h + o_a(h)$ où :
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent simple de } f \,; \\ h \text{ est un équivalent simple de } f - g. \end{cases}$$
3. On appelle DA à trois termes de f en a une expression de la forme $f = g + h + u + o_a(u)$ où :
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent simple de } f \,; \\ h \text{ est un équivalent simple de } f - g \,; \\ u \text{ est un équivalent simple de } f - g - h. \end{cases}$$

Et cætera.

a. Vu le lien équivalence/négligeabilité, c'est nécessairement un équivalent de f.

Que veut-on dire par « simple » ? Pas grand-chose et cela relèvera du bon sens lorsqu'on a à effectuer un DA. Évidemment les monômes ($x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$) sont les fonctions les plus simples de la galaxie, se sont eux qu'on privilégiera si possible ; ensuite viennent les autres $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{Z}$, puis (en $+\infty$) ln, exp et les autres $x \mapsto x^\alpha$, etc (mais en général on n'a besoin de rien d'autre).

Exemple 12 Les développements limités sont les plus simples des développements asymptotiques, ceux pour lesquels tous les termes utilisés sont des monômes.

Exemple 13 Un développement asymptotique à trois termes de la suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_n$ est $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

1. On peut le voir à la main :
   - i/ un équivalent simple de $\frac{1}{n-1}$ est assurément $\frac{1}{n}$;
   - ii/ un équivalent simple de $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$ est assurément $\frac{1}{n^2}$;
   - iii/ un équivalent simple de $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$ est assurément $\frac{1}{n^3}$.
2. On peut le voir à l'aide d'un changement de variable qui nous ramène à un DL : ce sera souvent le cas (hélas pas toujours). On pose $X = \frac{1}{n}$, on a $X \to 0$ et donc :
$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(1-1/n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-X} = X\big(1 + X + X^2 + o(X^2)\big) = X + X^2 + X^3 + o(X^3) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exemple 14 *À vous !*

Cherchons un DA en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Rappel : si un équivalent se présente sous la forme d'une somme, il n'a aucun intérêt en tant qu'équivalent !

Exercice 6. Exercice très classique, redonné dans la feuille de TD :

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation $x + \ln(x) = n$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notons-la x_n.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n \geqslant 0}$.