Structures algébriques

Groupes, sous-groupes, morphismes de groupe

Exercice 1. ©© *Groupe symétrique.*

On note S_n l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Rappeler combien il y a d'éléments dans $\mathfrak{S}_n$, puis décrire S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Rappeler pourquoi $(S_n, \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner la table de multiplication de S_3 (on pourra s'épargner les $\mathrm{id} \circ \mathrm{truc}$....).
4. Donner tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 2. Ⓓ *Morphismes, noyaux, images.*

Montrer que chacune des applications suivantes est un morphisme de groupes (en précisant les lois considérées). Déterminer leur noyau et leur image. Sont-ils injectifs ? surjectifs ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C}^\times, \\ k & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}, \\ x & \mapsto & ix \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \to & \mathbb{C}^\times, \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \qquad \tilde{h} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \to & \mathbb{R}^\times. \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$

Anneaux, sous-anneaux, morphismes d'anneaux

Exercice 3. Ⓓ *Anneaux / pas anneaux.*

Parmi les ensembles munis de deux lois suivants, déterminer lesquels sont des anneaux. Pour ces derniers : déterminer leurs inversibles, lesquels sont des anneaux commutatifs, lesquels sont des anneaux intègres, lesquels sont des corps.

1. $(\mathbb{R}^3, +, \wedge)$, où $\wedge$ est le produit vectoriel.
2. $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times)$.
3. $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$, où $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
4. $(\mathbb{D}, +, \times)$, où $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k}, (n, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux.
5. $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ où E est un ensemble.
6. $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ où E est un ensemble.

Exercice 4. © ★ *Un morphisme d'évaluation*

Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{C} \\ P(X) & \mapsto & P(\mathrm{i}) \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux et déterminer son noyau.

Exercice 5. ©© *Automorphismes de $\mathbb{Z}$*

Déterminer tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Corps, morphismes de corps

Exercice 6. ©© ★★ *Anneau intègre fini...*

1. Soit A un anneau commutatif intègre et soit $a \neq 0$. On définit l'application γ_a par : $\forall x \in A,\ \gamma_a(x) = ax$. Montrer que γ_a est injective.
2. En déduire que tout anneau intègre fini commutatif et non nul est un corps.

Exercice 7. ©©
Déterminer tous les automorphismes du corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exercice 8. ©© ★★ *Automorphismes de* $\mathbb{R}$.

Dans cet exercice, on montre que le seul automorphisme du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est l'identité.

Soit f un tel automorphisme.

1. Justifier qu'on a : $f_{|\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$.
2. Justifier qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0$.
3. En déduire que f est croissante.
4. Conclure.

Exercice 9. Ⓓ
Exhiber deux automorphismes distincts du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.