Ordre supérieur

Exercice 0.
Corrigé en séance.

Exercice 1. ©© *Curryfication*

Montrer que, pour tous ensembles A, B, C, les ensembles $(A^C)^B$ et $A^{B\times C}$ sont en bijection.

Notons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (A^C)^B & \to & A^{B\times C} \\ f & \mapsto & (b,c)\mapsto f(b)(c) \end{array} \right.$ et $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} A^{B\times C} & \to & (A^C)^B \\ g & \mapsto & b \mapsto \big(c \mapsto g(b,c)\big) \end{array} \right.$.

Un calcul direct montre qu'on a $\Phi\circ\Psi = \mathrm{id}$ et $\Psi\circ\Phi = \mathrm{id}$.

Exercice 2. ©© ★★ *Comparaisons.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On note $f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application "image directe par f" et $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ l'application "image réciproque par f".

On se donne de plus $U, V \subset A$ et $P, Q \subset B$.

1. Comparer $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(P))$ et P.
2. Comparer $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(U))$ et U.
3. Comparer $f^{\leftarrow}(P\cup Q)$ et $f^{\leftarrow}(P)\cup f^{\leftarrow}(Q)$.
4. Comparer $f^{\leftarrow}(P\cap Q)$ et $f^{\leftarrow}(P)\cap f^{\leftarrow}(Q)$.
5. Comparer $f^{\rightarrow}(U\cup V)$ et $f^{\rightarrow}(U)\cup f^{\rightarrow}(V)$.
6. Comparer $f^{\rightarrow}(U\cap V)$ et $f^{\rightarrow}(U)\cap f^{\rightarrow}(V)$.

1. On a $f\big(f^{-1}(P)\big) \subset P$.
   — Soit $y \in f\big(f^{-1}(P)\big)$. Par définition il existe $x \in f^{-1}(P)$ tel que $f(x) = y$. Par définition de $f^{-1}(P)$, on a alors $f(x) \in P$, c'est-à-dire $y \in P$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $A \neq \emptyset$, $|B| \geqslant 2$, $f = x \mapsto b$ (où b est un élément fixé de B) et $P = B$.
   On a alors $f\big(f^{-1}(P)\big) = f(A) = \{b\}$ qui est strictement inclus dans B.
2. On a $U \subset f^{-1}\big(f(U)\big)$.
   — Soit $x \in U$. Par définition on a $f(x) \in f(U)$ et donc, par définition,
   $x \in f^{-1}\big(f(U)\big)$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $|A| \geqslant 2$, $B \neq \emptyset$, $f = x \mapsto b$ (où b est un élément fixé de B) et $U = \{a\}$ (où a est un élément fixé de A). On a alors $f^{-1}\big(f(U)\big) = f^{-1}\big(\{b\}\big) = A$ qui contient strictement $\{a\}$.
3. On a $f^{-1}(P\cup Q) = f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$.
   — Soit $x \in f^{-1}(P\cup Q)$. Par définition, on a $f(x) \in P\cup Q$, il y a donc deux cas possibles : $f(x) \in P$ ou $f(x) \in Q$. Si $f(x) \in P$ alors $x \in f^{-1}(P)$ par définition, et donc $x \in f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$. Si $f(x) \in Q$ alors $x \in f^{-1}(Q)$ par définition, et donc $x \in f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$. Dans tous les cas on a $x \in f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $x \in f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$, il y a donc deux cas possibles : $x \in f^{-1}(P)$ ou $x \in f^{-1}(Q)$. Dans le premier cas on a $f(x) \in P$, donc $f(x) \in P\cup Q$. Dans le second cas on a $f(x) \in Q$, donc $f(x) \in P\cup Q$. Dans tous les cas on a $f(x) \in P\cup Q$, donc $x \in f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$ par définition. D'où l'inclusion réciproque.
4. On a $f^{-1}(P\cap Q) = f^{-1}(P)\cap f^{-1}(Q)$.
   — Soit $x \in f^{-1}(P\cap Q)$. Par définition, on a $f(x) \in P\cap Q$, c'est-à-dire $f(x) \in P$ et $f(x) \in Q$. Comme $f(x) \in P$ on a $x \in f^{-1}(P)$ par définition. Comme $f(x) \in Q$ on a $x \in f^{-1}(Q)$ par définition. Finalement on a $x \in f^{-1}(P)$ et $x \in f^{-1}(Q)$, et donc $x \in f^{-1}(P)\cap f^{-1}(Q)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $x \in f^{-1}(P)\cap f^{-1}(Q)$, on a donc $x \in f^{-1}(P)$ et $x \in f^{-1}(Q)$. Comme on a $x \in f^{-1}(P)$, on a $f(x) \in P$. Comme on a $x \in f^{-1}(Q)$, on a $f(x) \in Q$. Finalement on a $f(x) \in P$ et $f(x) \in Q$, et donc $f(x) \in P\cap Q$. D'où l'inclusion réciproque.

5. On a $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$.
   — Soit $y \in f(U \cup V)$. Par définition, il existe $x \in U \cup V$ tel que $y = f(x)$. On a deux cas possibles : soit $x \in U$, et donc $f(x) \in f(U) \subset f(U) \cup f(V)$; soit $x \in V$, et donc $f(x) \in f(V) \subset f(U) \cup f(V)$. Dans tous les cas on a $y = f(x) \in f(U) \cup f(V)$. D'où l'inclusion directe.
   — Soit $y \in f(U) \cup f(V)$. On a deux cas possibles : soit $y \in U$, et donc il existe $x \in U \subset U \cup V$ tel que $y = f(x)$; soit $y \in V$, et donc il existe $x \in V \subset U \cup V$ tel que $y = f(x)$. Dans tous les cas il existe $x \in U \cup V$ tel que $y = f(x)$, et donc $y \in f(U \cup V)$. D'où l'inclusion réciproque.
6. On a $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$.
   — Soit $y \in f(U \cap V)$. Par définition il existe $x \in U \cap V$ tel que $f(x) = y$.
   En particulier, on a $x \in U$, donc $f(x) \in f(U)$. De même on a $x \in V$, donc $f(x) \in f(V)$. On a donc $y = f(x) \in f(U) \cap f(V)$. D'où l'inclusion.
   — L'autre inclusion n'est pas toujours vraie.
   Contre-exemple : $A = B = \{1, 2\}$, $f = x \mapsto 1$, $U = \{1\}$ et $V = \{2\}$. On a alors $f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(U) \cap f(V) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$. Ce contre-exemple se généralise à $|A| \geqslant 2$ et $B \neq \emptyset$, en prenant f de la forme $x \mapsto b$, et U et V non vides et tels que $U \coprod V = A$.

Exercice 3.
Corrigé en séance.

Exercice 4. ©© ★ *Fonctions caractéristiques.*

Soit E un ensemble et $A, B \subset E$.

1. En utilisant une expression de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ vue en cours, déduire une démonstration simple de l'associativité de la différence symétrique.
2. Montrer qu'on a $\mathcal{P}(B)^A \simeq \{0, 1\}^{A\times B}$.

1. Notons $n \ mod \ 2$ le reste dans la division de n par 2. On a : $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = (\mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_{\Delta C}) \ mod \ 2 = ((\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ mod \ 2) + \mathbb{1}_{\Delta C}) \ mod \ 2 = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C) \ mod \ 2 = (\mathbb{1}_A + (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \ mod \ 2)) \ mod \ 2 = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$.
2. $\mathcal{P}(B) \simeq \{0, 1\}^B$ donc, d'après l'exercice 4 de la feuille sur les ensembles (dont le corrigé en est ligne) on a $\mathcal{P}(B)^A \simeq \left(\{0, 1\}^B\right)^A$. Puis par curryfication (exercice 1 ci-dessus) $\left(\{0, 1\}^B\right)^A \simeq \{0, 1\}^{A\times B}$.
   Et par transitivité de $\simeq$ (exercice 1.9 de la feuille sur les relations), on conclut bien $\mathcal{P}(B)^A \simeq \{0, 1\}^{A\times B}$.

Exercice 5.
Corrigé en séance.