Ordre supérieur

Généralités

Exercice 0. © *Dérivation sur $\mathcal{C}^\infty$*

On considère l'application $\dfrac{\partial}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty & \to & \mathcal{C}^\infty \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$.

1. Justifier qu'elle est bien définie.
2. Est-elle surjective ? Si oui donner un inverse à droite.
3. Est-elle injective ? Si oui donner un inverse à gauche.

Exercice 1. ©© *Curryfication*

Montrer que, pour tous ensembles A, B, C, les ensembles $(A^C)^B$ et $A^{B\times C}$ sont en bijection.

Images directe et réciproque

Exercice 2. ©© ★★ *Comparaisons.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On note $f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application "image directe par f" et $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ l'application "image réciproque par f".

On se donne de plus $U, V \subset A$ et $P, Q \subset B$.

1. Comparer $f^{\to}(f^{\leftarrow}(P))$ et P.
2. Comparer $f^{\leftarrow}(f^{\to}(U))$ et U.
3. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cup Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cup f^{\leftarrow}(Q)$.
4. Comparer $f^{\leftarrow}(P \cap Q)$ et $f^{\leftarrow}(P) \cap f^{\leftarrow}(Q)$.
5. Comparer $f^{\to}(U \cup V)$ et $f^{\to}(U) \cup f^{\to}(V)$.
6. Comparer $f^{\to}(U \cap V)$ et $f^{\to}(U) \cap f^{\to}(V)$.

Exercice 3. ©

Soit E un ensemble et $f : E \to E$. Ici, par abus, on notera encore f l'application "image directe par f".

Montrer que $f : E \to E$ est bijective si et seulement si $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\big({}^cX\big) = {}^cf(X)$.

Fonctions caractéristiques

Exercice 4. ©© ★ *Fonctions caractéristiques.*

Soit E un ensemble et $A, B \subset E$.

1. En utilisant une expression de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ vue en cours, déduire une démonstration simple de l'associativité de la différence symétrique.
2. Montrer qu'on a $\mathcal{P}(B)^A \simeq \{0,1\}^{A\times B}$.

Exercice 5. © ★★ $\displaystyle\sum_{X,Y\subset E} |X\cap Y|$, *plus simple ?*

Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. On a déjà vu deux méthodes de calcul de $\displaystyle\sum_{X,Y\subset E} |X\cap Y|$, en voici une troisième.

1. Justifier que, pour toute partie A de E, on a $|A| = \sum\limits_{x\in E} \chi_A(x)$.
2. Justifier que, pour tout $x \in E$, on a $\sum\limits_{X\subset E} \chi_X(x) = 2^{n-1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{X,Y\subset E} |X\cap Y|$.