Un exercice sur les suites

L'exercice suivant a été donné en khôlle :

Soit $(u_n)_n$ une suite rélle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} < u_n < 1$.

On définit une suite $(v_n)_n$ par $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ v_n = \dfrac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}. \end{cases}$

Montrer que $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

En page 2 on trouvera une indication qui était donnée avec l'exercice, en page 3 un corrigé. Se précipiter sur le corrigé sans avoir cherché avant est totalement inutile, dans ce cas autant ne pas le lire et ignorer cet exercice.

Indication donnée avec l'exercice :

« *Montrer qu'on a* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ *et* $v_{n+1} - v_n > 0$.
En déduire que la suite converge et montrer que si sa limite n'est pas 1 *alors la suite* $(u_n)_n$ *tend vers* 0 ».

(Je n'ai suivi qu'en partie cette indication dans le corrigé.)

Corrigé :

1. Une première remarque c'est que la suite est définie par une relation de récurrence simple dépendante. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et x tel que $\alpha x + 1 \neq 0$, on note $f_\alpha(x) = \frac{x+\alpha}{\alpha x+1}$. On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ v_n = f_{u_n}(v_{n-1})$. Il est raisonnable d'étudier f_α pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (propriété vérifiée par tous les termes u_n). L'application f_α est une homographie, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{1-\alpha^2}{(\alpha x+1)^2} > 0$. Donc f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque c'est un intervalle.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} < u_n < 1$. Il est raisonnable d'espérer obtenir la même relation sur v_n.

   Montrons donc par récurrence qu'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} < v_n < 1$.

   <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$ on a $\frac{1}{2} < v_0 = u_0 < 1$. D'où l'initialisation.

   <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\frac{1}{2} < v_n < 1$. On a $f_{u_n}\left(\frac{1}{2}\right) < f_{u_n}(v_n) < f_{u_n}(1)$ *i. e.* $\dfrac{\frac{1}{2} + u_n}{1 + \frac{1}{2}u_n} < v_{n+1} < \dfrac{1 + u_n}{1 + u_n}$.
   On a $\frac{1}{2} < u_n < 1$ donc $\dfrac{\frac{1}{2} + u_n}{1 + \frac{1}{2}u_n} > \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}u_n} > \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. D'où : $\frac{1}{2} < v_{n+1} < 1$.

   La propriété est donc bien héréditaire.

   <u>Conclusion</u> : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. Ici je suis l'indication : soit $n \in \mathbb{N}$ et calculons $v_{n+1} - v_n$.

   On a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n} - \dfrac{v_n + u_{n+1}v_n^2}{1 + u_{n+1}v_n} = \dfrac{u_{n+1} - u_{n+1}v_n^2}{1 + u_{n+1}v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n}(1 - v_n^2)$ qui est du signe de $(1 - v_n^2)$ car u_{n+1} et v_n sont strictement positifs. De plus, on a vu qu'on avait $v_n < 1$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

   Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_n$ est strictement croissante.

   La suite $(v_n)_n$ est croissante et majorée (par 1) donc converge.

4. Notons ℓ la limite de $(v_n)_n$. On a $v_{n+1} \to \ell$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ell + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$. On vient de voir qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n} = \ell + \varepsilon_n$ *i. e.* $v_n + u_{n+1} = \ell + \ell u_{n+1}v_n + \varepsilon_n + \varepsilon_n u_{n+1}v_n$.
   La suite $(u_{n+1})_n$ converge donc est bornée. La suite $(v_n)_n$ est bornée. Donc la suite $(u_{n+1}v_n)_n$ est bornée et par TdG la suite $\varepsilon_n u_{n+1}v_n$ est de limite nulle. Ainsi en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + \varepsilon_n u_{n+1}v_n$ on a encore $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$. On a établi, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n + u_{n+1} = \ell + \ell u_{n+1}v_n + \tilde{\varepsilon}_n$, *i. e.* $u_{n+1}(1 - \ell v_n) = \ell - v_n + \tilde{\varepsilon}_n \to 0$ et donc $1 - \ell v_n \to 0$ puisque $\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)_n$ est bornée (par 1 et 2).
   Par unicité de la limite on a $1 - \ell^2 = 0$ et comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$ on conclut $\boxed{\ell = 1}$.

Je suis preneur de toute autre méthode.