Suites

Sans le cours

Exercice 1. Ⓓ *Vrai ou faux ?*

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs réelles. Déterminer la validité de chacune des assertions suivantes. *On attend que vous démontriez les assertions vraies et que vous donniez un contre-exemple aux assertions fausses.*

i. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$.

ii. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

iii. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

iv. Si (u_n) est strictement décroissante et à termes positifs ou nuls, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

v. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et (u_n) est à termes positifs ou nuls alors (u_n) est décroissante ACR.

vi. Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$.

vii. Si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = +\infty$.

viii. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) est convergente.

ix. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

x. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2. Ⓓ Donner l'éventuelle monotonie et l'éventuelle limite des suites de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^{n-1} - 3^n}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad w_n = \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + 1}.$$

Calculer, lorsqu'elle existent, les limites des suites de termes généraux suivants :

$$t_n = \sqrt[n]{n}, \qquad x_n = \frac{\sin(n)}{n}, \qquad y_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad z_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

Exercice 3. © ★ *Des avec des sommes*

Calculer, lorsqu'elle existent, les limites des suites de termes généraux suivants :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)$$

$(H_n)_n$ s'appelle *la série harmonique*, on en reparlera ; pour traiter cet exemple, on pourra étudier $H_{2n} - H_n$.
Quant à $(s_n)_n$, son étude sera facilitée si l'on montre préalablement : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x$.

Avec le cours ?

Exercice 4. ©© ★ *Deux rectangles*

On rappelle que pour $a < b$ et $f \leqslant g$ continues, on a $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$. On note, pour tout entier n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Représenter sur un même graphe plusieurs courbes représentatives de fonctions de la forme $\left\{\begin{array}{lcl} [0, \frac{\pi}{4}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan^n(t) \end{array}\right.$.
2. Justifier que, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{5}\right) < \varepsilon$.
3. En remarquant qu'on a $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{5}} tan^n(t)\ \mathrm{d}t\ +\ \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{5}}^{\frac{\pi}{4}} tan^n(t)\ \mathrm{d}t$, déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de I_n et la valeur de $I_{n+2} + I_n$. Puis retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 5. ©© ★★ $\cos(n)$ *et* $\sin(n)$

On va montrer par l'absurde que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$, sont divergentes.

1. Justifier qu'on a $v_1 \neq 0$.
2. Pour $n \geqslant 0$, exprimer $u_{n+1} - u_{n-1}$ en fonction de v_n et $v_{n+1} - v_{n-1}$ en fonction de u_n.
3. Déduire des deux questions précédentes que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0.
4. En contemplant $u_n^2 + v_n^2$, conclure qu'aucune des deux suites ne peut converger.
5. Donner (sans démonstration détaillée, mais avec l'idée) une CNS sur α pour que la suite $(\sin(\alpha n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 6. ©©© ★★ *Irrationalité de* e (enfin !)

Dans cet exercice, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.
   Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irrationnelle.
   On pourra raisonner par l'absurde et, en supposant que ℓ sécrit $\ell = \frac{p}{q}$, encadrer ℓ à l'aide de u_q et v_q.
3. Montrer qu'on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} = u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.
   On pourra procéder par récurrence à l'aide d'une intégration par parties.
4. En déduire **que** e **est irrationnel** !

Suites extraites

Exercice 7. © *Suites extraites adjacentes*

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer qu'elle converge.

Exercice 8. ★

1. Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
2. Montrer qu'une suite réelle est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite de limite $+\infty$.
3. Montrer qu'une suite réelle tend vers $+\infty$ si et seulement si elle ne possède pas de sous-suite majorée.

Exercice 9. © ★★★

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ telles que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite qui converge vers x. Montrer qu'on a $q_n \to +\infty$ et $|p_n| \to +\infty$.

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Suites à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 10. © ★★ *Bolzano-Weierstrass*

Montrer que le théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai pour les suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11. © ★★★ *Exponentielle complexe*

Calculer, pour $z \in \mathbb{C}$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ lorsqu'elle existe.[1]

Énoncé disponible à l'adresse suivante : http://mpsi.daudet.free.fr/.

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.

1. On a déjà étudié le cas $z \in \mathbb{R}$.