Matrices

I. Opérations de base.

Exercice 1. *Somme, opposée, transposée*

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A - {}^tA$.

Exercice 2. *Produits matriciels*

Déterminer tous les couples de matrices dont on peut faire le produit dans la liste suivante.
Déterminer tous les couples de matrices qui commutent ($M \times N = N \times M$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ©© ★ *Exponentiation*

(a) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice de l'exercice 1.

(b) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ à l'aide d'une suite bien connue.

(c) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(d) On note $(\mathbb{1})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1.
Calculer $(\mathbb{1})^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

(e) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer M^p, pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. ©© ★ *Inversion*

Déterminer les matrices inversibles de la liste suivante. Les inverser.

(a) La matrice A de l'exercice 1.

(b) La matrice G de l'exercice 2.

(c) La matrice J de l'exercice précédent.

(d) La matrice $(\mathbb{1})$ de l'exercice précédent.

II. Applications.

Exercice 5. *En algèbre : résolution de systèmes linéaires.*

1. Soit E une matrice $n \times n$ telle que $E^n = (0)$. Montrer que $M = I_n - E$ est inversible et calculer E^{-1}.
2. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
3. Résoudre $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$.

Exercice 6. *En analyse : suites récurrentes linéaires multiples.*

Exprimer en fonction de n, u_0 et v_0 les termes généraux de suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$.

Exercice 7. *En Info/Géométrie.*

Montrer que, si un point a pour coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé direct, et qu'on souhaite obtenir les coordonnées dans ce même reprère du point obtenu après une rotation d'angle θ et de centre l'origine du repère, les coordonnées du nouveau point s'obtiennent par le produit matriciel $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Là c'est un exemple rudimentaire mais sur le même principe les matrices sont omniprésentes en traitement de l'image.

Exercice 8. *En probabilité : battage de cartes*

On souhaite battre un paquet de 2 cartes [1]. Pour être sûr de bien le mélanger on effectue n battages successifs. Après chaque battage, le paquet a la même probabilité $0 < p < 1$ de ne pas être modifié, et donc la probabilité $q = 1 - p$ d'avoir été inversé. On note u_n la probabilité que le paquet revienne à son état initial à l'issue de n battages, et v_n la probabilité qu'il n'y revienne pas. On note aussi $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $M \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$?
2. Que vaut $M^n \times e_1$?
3. Que dire des probabilités u_n et v_n lorsque n tend vers l'infini ? Qu'en déduire ?

Énoncé disponible à l'adresse suivante : http://mpsi.daudet.free.fr/.

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.

1. Bien sûr le 2 est idiot, mais on pourrait faire la même chose pour un paquet de 52 cartes, le principe exposé ici permettrait d'arriver au même résultat après des calculs toutefois plus difficiles à mener.