

Calculs d'intégrales

PRIMITIVES USUELLES

Exercice 1. *Intégrales de fonctions usuelles*

Calculer : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$, $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\int_0^1 x^n dx$.

Exercice 2. *Linéarité de l'intégrale*

Calculer : $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1} dx$.

IPP

Exercice 3. *Intégrations par parties*

Calculer : $\int_0^1 x \operatorname{ch}(x) dx$, $\int_0^1 x^2 \operatorname{ch}(x) dx$, $\int_1^e \ln(t)^3 dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$ (par parties et par linéarisation).

Exercice 4. *Primitivations par parties*

Déterminer des primitives des fonctions suivantes, sur des intervalles que l'on déterminera :

- a. $t \mapsto \ln(t)$ puis $t \mapsto t^n \ln(t)$, $n \in \mathbb{N}$.
- b. $t \mapsto \arccos(t)$ et $t \mapsto \arcsin(t)$.
- c. $t \mapsto \arctan(t)$.

IDENTIFICATION DE MOTIF

Exercice 5. *Intégrations par identification de motif*

Calculer : $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$, $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ puis $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ (on pourra combiner avec une IPP).

Exercice 6. *Primitivations par identification de motif*

Déterminer des primitives des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas sur quel intervalle on se place, sans chercher à déterminer tous les intervalles possibles, mais en se plaçant sur des intervalles maximaux :

$$t \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad t \mapsto \tan(t), \quad x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}, \quad x \mapsto \cos^n(x) \sin(2x), \quad x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}.$$

CHANGEMENT DE VARIABLES

Exercice 7. *Intégration par changement de variable indiqué*

- a. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $u = e^x$.
- b. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.
- c. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ en posant $u = \sqrt{e^x + 1}$.
- d. $\int_0^a \frac{dt}{1 + \sin(t)}$ où $a \in]0, \pi[$, en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. En déduire $\int_0^\pi \frac{dt}{1 + \sin(t)} = 2$.

Exercice 8. *Intégrations par changement de variable à trouver...*

... mais pas bien méchant. Calculer : $\int_0^1 \frac{dx}{4e^x + e^{-x} + 4}$, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos(t)}$.

Exercice 9. *Primitivations par changement de variable*

Déterminer des primitives des fonctions suivantes, sur des intervalles que l'on déterminera : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$.

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 10. *Une fraction rationnelle en x*

Calculer, sur un intervalle maximal que l'on déterminera : $\int \frac{4x^2(3x^2 + 1) dx}{(x-1)^2(2x^2 + x + 1)}$.

Exercice 11. *Une fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin(t)$.*

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)} d\theta$. On pourra poser $t = \cos(\theta)$.

SOMMES DE RIEMANN

Exercice 12. *Pour le plaisir*

Retrouver la valeur de $\int_0^1 x^2 dx$ en utilisant une somme de Riemann.

Exercice 13. *Quelques sommes de Riemann*

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$;
2. $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;
3. $w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Énoncé disponible à l'adresse suivante : <http://mpsi.daudet.free.fr/>.

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.