Développements limités

Exercice 5. *Calcul de limites (2)*

Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a. $\dfrac{2\arctan(x) - \arctan 2x}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ b. $\dfrac{\sin(\mathrm{sh}(x))}{\mathrm{sh}(\sin(x))}$ c. $\dfrac{\sin(\sin(\sin(\ldots\sin(x)\ldots)))}{\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\ldots\mathrm{sh}(x)\ldots)))}$

a. Notons $f(x) = \dfrac{2\arctan(x) - \arctan 2x}{x^n}$.
On effectue un DL à l'ordre 3 du numérateur : $2\arctan(x) - \arctan 2x = 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$. D'où $f(x) = x^{3-n}\big(2+\varepsilon(x)\big)$.

On cherche donc la limite d'un prouit et dans tous les cas le facteur $\big(2+\varepsilon(x)\big)$ tend vers 2. Quatre cas :

- Si $n < 3$ (*i. e.* $n \in \{0,1,2\}$) alors $x^{3-n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par produit.
- Si $n = 3$ alors $x^{3-n} = 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ par produit.
- Si $n > 3$ et n est impair alors $3-n$ est pair et strictement négatif donc $x^{3-n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $n > 3$ et n est pair alors $3-n$ est impair et strictement négatif donc x^{3-n} n'a pas de limite en 0 donc $f(x)$ n'a pas de limite en 0.

b. Après calcul de DL (à l'ordre 1 !) : $\sin(\mathrm{sh}(x)) = x + x\varepsilon_1(x)$ et $\mathrm{sh}(\sin(x)) = x + x\varepsilon_2(x)$ d'où $\dfrac{\sin(\mathrm{sh}(x))}{\mathrm{sh}(\sin(x))} = \dfrac{x + x\varepsilon_1(x)}{x + x\varepsilon_2(x)} = \dfrac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ par quotient.

c. Notons ici $f^k = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\ \text{fois}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Avec cette notation, on nous demande de calculer la limite en 0 d'une quantité de la forme $\dfrac{\sin^n(x)}{\mathrm{sh}^m(x)}$ (il n'est même pas clair qu'on ait le même nombre d'itérations au numérateur et au dénominateur).

Bien sûr, une récurrence immédiate basée sur le $DL_1(0)$ du sinus montre que pour tout entier n il existe une fonction de limite nulle ε_n telle que $\sin^n(x) = x + x\varepsilon_n(x)$. De même, une récurrence immédiate basée sur le $DL_1(0)$ du sinus hyperbolique (qui est le même que celui du sinus) montre que pour tout entier m il existe une fonction de limite nulle $\tilde{\varepsilon}_m$ telle que $\mathrm{sh}^m(x) = x + x\tilde{\varepsilon}_m(x)$.

Et donc $\dfrac{\sin^n(x)}{\mathrm{sh}^m(x)} = \dfrac{x + x\varepsilon_n(x)}{x + x\tilde{\varepsilon}_m(x)} = \dfrac{1+\varepsilon_n(x)}{1+\tilde{\varepsilon}_m(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ par quotient.

Exercice 7. *Application rigolote (annale de CCP).*

a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

Calcul direct sans difficulté particulière : $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{24}x^4 + \dfrac{13}{24}x^5 + x^5\varepsilon(x)$.

b. Donner, pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.
La fonction f est $\mathcal{C}^{+\infty}(]-\infty,1[$ donc en particulier $\mathcal{C}^5$ au voisinage de 0. Par conséquent, d'après la formule de Taylor-Young, son $DL_5(0)$ est $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + x^5\tilde{\varepsilon}(x)$.

Par unicité d'un DL, on peut identifier et obtenir : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 1 \\ f^{(3)}(0) = 3 \\ f^{(4)}(0) = 13 \\ f^{(5)}(0) = 65 \end{cases}$.

Ce qui peut se voir à la main mais c'est plus pénible.