

## Développements limités

**Exercice 1.** Une application de la formule de Taylor pour se mettre dans le bain

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , donner le développement limité en 0 à l'ordre  $n$  de la fonction  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .

**Exercice 2.** Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...

Donner les développements limités en 0 à l'ordre  $n$  de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$ , puis le développement limité en 0 à l'ordre  $2n+1$  de la fonction  $\arctan$ , puis le développement limité en 0 à l'ordre  $n$  de la fonction  $\arccos$ .

**Exercice 3.** Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...

Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

a.  $x \mapsto \frac{1}{1+\operatorname{sh}(x)}$ , à l'ordre 3,

b.  $x \mapsto e^{\cos(x)}$ , à l'ordre 4,

c.  $x \mapsto 1/(2-x)$ , à l'ordre  $n$ .

**Exercice 4.** Calcul de limites (1)

Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a.  $\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$

b.  $\frac{\operatorname{sh}(x) - \arctan(x)}{x^3}$

c.  $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

**Exercice 5.** Calcul de limites (2)

Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a.  $\frac{2 \arctan(x) - \arctan 2x}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

b.  $\frac{\sin(\operatorname{sh}(x))}{\operatorname{sh}(\sin(x))}$

c.  $\frac{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x) \dots)))}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\dots \operatorname{sh}(x) \dots)))}$

**Exercice 6.** Calcul de limites (3)

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0)$ .

**Exercice 7.** Application rigolote (annale de CCP, mais pas dans la banque INP).

a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$ .

b. Donner, pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , la valeur de  $f^{(k)}(0)$ .