

Développements limités

Exercice 1. Une application de la formule de Taylor pour se mettre dans le bain

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donner le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Exercice 2. Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...

Donner les développements limités en 0 à l'ordre n de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, puis le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de la fonction \arctan , puis le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction \arccos .

Exercice 3. Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...

Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

a. $x \mapsto \frac{1}{1+\operatorname{sh}(x)}$, à l'ordre 3,

b. $x \mapsto e^{\cos(x)}$, à l'ordre 4,

c. $x \mapsto 1/(2-x)$, à l'ordre n .

Exercice 4. Calcul de limites (1)

Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a. $\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$

b. $\frac{\operatorname{sh}(x) - \arctan(x)}{x^3}$

c. $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

Exercice 5. Calcul de limites (2)

Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a. $\frac{2 \arctan(x) - \arctan 2x}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

b. $\frac{\sin(\operatorname{sh}(x))}{\operatorname{sh}(\sin(x))}$

c. $\frac{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x) \dots)))}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\dots \operatorname{sh}(x) \dots)))}$

Exercice 6. Calcul de limites (3)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0)$.

Exercice 7. Application rigolote (annale de CCP).

a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$.

b. Donner, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.