Décompositions en éléments simples

Correction des exercices d'application.

Exercice 5. *Applications*

Calculer les intégrales et sommes suivantes :

a. $\displaystyle\int_4^8 \frac{t^3}{t^3-t^2-6t}\,\mathrm{d}t$.

Après factorisation puis DES : $\dfrac{t^3}{t^3-t^2-6t} = 1 - \dfrac{4/5}{t+2} + \dfrac{9/5}{t-3}$.

On utilise la linéarité de l'intégrale, en notant que $t+2$ et $t-3$ sont positifs sur $[4,8]$:

$$\int_4^8 \frac{t^3}{t^3-t^2-6t}\,\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_4^8 - \frac{4}{5}\Big[\ln(t+2)\Big]_4^8 + \frac{9}{5}\Big[\ln(t-3)\Big]_4^8 = \frac{20-4\Big(\ln(10)-\ln(6)\Big)+9\Big(\ln(5)-\ln(1)\Big)}{5}$$

. D'où le résultat final $\boxed{4+\ln(5)+\frac{4}{5}\ln(3)}$.

b. $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{t^2-7t+6}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$ (attention...).

Après factorisation puis DES : $\dfrac{t^2-7t+6}{t^3-5t^2+6t} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t-3} + \dfrac{2}{t-2}$.

On utilise la linéarité de l'intégrale, en notant que t est positif sur $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ mais que $t-3$ et $t-2$ y sont négatifs :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{t^2-7t+6}{t^3-5t^2+6t} = \Big[\ln(t)\Big]_1^{\frac{3}{2}} - 2\Big[\ln(3-t)\Big]_1^{\frac{3}{2}} + 2\Big[\ln(2-t)\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \Big(\ln(3/2)-\ln(1)\Big) - 2\Big(\ln(3/2)-\ln(2)\Big) + 2\Big(\ln(1/2)-\ln(1)\Big)$$

. D'où le résultat final $\boxed{\ln(2)-\ln(3)}$.

c. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

Après factorisation puis DES : $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1/2}{2k-1} - \dfrac{1/2}{2k+1}$.

On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k+1}) \text{ en notant pour } k\in\mathbb{N},\ a_k = \frac{1}{2k+1}.$$

La somme est télescopique : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}(a_2 - a_{n+1}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)}}$.

d. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Après factorisation puis DES : $\dfrac{1}{k^3-k} = -\dfrac{1}{k} + \dfrac{1/2}{k+1} + \dfrac{1/2}{k-1}$.

Pour faire apparaître nos télescopages, on écrit évidemment $-\dfrac{1}{k} = \dfrac{-1/2}{k} + \dfrac{-1/2}{k}$, qui donne :

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(a_{k-1}-a_k\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)\right)$$

Où l'on a noté, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{1}{k}$. Les deux sommes sont donc télescopiques et on a donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\Big(\left(a_1-a_n\right)+\left(a_{n+1}-a_2\right)\Big) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right),$$

i. e. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}}$.