

Décompositions en éléments simples

Exercice 1. Cas scindé à racines simples

1. Décomposer en éléments simples $\frac{X^2 - 7X + 6}{X^3 - 5X^2 + 6X}$ puis $\frac{X^5 - 5X^4 + 31X^2 - 43X + 6}{X^3 - 5X^2 + 6X}$.
2. Décomposer en éléments simples $\frac{X^3 - 6X - 19}{2X^3 - 11X^2 + 7X + 20}$.
3. Décomposer en éléments simples $\frac{X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6}{X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2}$.

Exercice 2. Cas scindé

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^4}{X^3 + 3X^2 + 3X + 1}, \quad \frac{1}{4X^4 - 12X^3 + 13X^2 - 6X + 1}.$$

Exercice 3. Cas sans facteur multiple

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^3 + 1}, \quad \frac{1}{X^4 + 1}, \quad \frac{X^6}{X^4 + X^2 + 1}.$$

Exercice 4. Cas général

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{4}{X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1}, \quad \frac{X^5}{X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1}.$$

(on pourra faire la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$.)

Exercice 5. Applications

Calculer les intégrales et sommes suivantes :

- a. $\int_4^8 \frac{t^3}{t^3 - t^2 - 6t} dt$,
- b. $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{t^2 - 7t + 6}{t^3 - 5t^2 + 6t} dt$ (attention...),
- c. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$,
- d. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$.