# Racines $n^e$ de l'unité et polygones réguliers

*Le but principal de cette activité est l'étude des racines n-ièmes de l'unité et la construction de polygones réguliers.*

Effectuer un grand dessin (par exemple en prenant pour unité 5 cm) en traçant dès à présent le cercle trigonométrique et les points $O$, $I$, $J$ (ce dessin sera complété au fur et à mesure des questions).

Le but du jeu est de construire de nouveaux points à partir de ceux-là uniquement à l'aide d'un compas et d'une règle (non graduée). Dans la suite, on désignera sobrement par "$n-$gone" le polygone régulier à $n$ côtés de centre $O$ et ayant $I$ parmi ses sommets. On désignera par "construction" une construction à la règle (non graduée) et au compas.

## Racines $n-$ièmes de l'unité et $n-$gone.

1. Justifier que les $n$ complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ont pour affixes les $n$ sommets du $n-$gone.

## Racines sixièmes de l'unité et construction de l'hexagone.

2. On note $M$ le point d'affixe $z_M = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$. Calculer $|1 - z_M|$.

3. En déduire une construction extrèmement simple de l'hexagone.

## Racines cinquièmes de l'unité et construction du pentagone.

Dans cette partie, on note $\omega = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

4. Exprimer toutes les racines cinquièmes de l'unité en fonction de $\omega$.

5. On note $S(\omega) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
   a. Calculer $S(\omega)$ par un calcul direct.
   Retrouver l'expression de $S(\omega)$ en interprétant géométriquement $\dfrac{S(\omega)}{5}$.
   b. Exprimer :
      - $\omega + \omega^4$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
      - $\omega^2 + \omega^3$ en fonction de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
      - $\omega^2 + \omega^3$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   c. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 2 que l'on précisera.
   Conclure finalement qu'on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
6. a. Construire le point $K$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ puis le point $L$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.
   b. À l'aide des points $K$ et $L$, construire le point $P$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.
   c. En déduire la construction du point $N$ d'affixe $\omega$, puis terminer la construction du pentagone.

## Construction du $15-$gone

7. Proposer une construction pour le 15-gone. *Indication :* $15 = \frac{30}{2}$.

Énoncé disponible à l'adresse suivante : http://mpsi.daudet.free.fr/.
N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.