Devoir Surveillé $n°3$

Corrigé

Le théorème de classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

Cf activité 3.

Les sous-anneaux de $\mathbb{R}$.

Dans toute la partie, on considère un sous-anneau A de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1. Montrer que, si A est de la forme $\gamma\mathbb{Z}$ avec $\gamma > 0$, alors on a $\gamma = \frac{1}{k}$ pour un certain entier $k \geqslant 1$.
Pour un tel entier k, donner sans démonstration la limite de la suite $\left(\left(\frac{1}{k}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   • A est un anneau donc $1 \in A = \{\gamma k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ donc il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = k\gamma$.
Comme on a $\gamma > 0$ et $1 > 0$, on a $k > 0$ *i. e.* $k \geqslant 1$. En particulier on peut diviser par k et on a $\gamma = \frac{1}{k}$.

   • On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

2. En déduire que A est soit égal à $\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

   A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ donc en particulier un sous-groupe de $\mathbb{R}$. D'après la partie précédente, il suffit de montrer que $\gamma = \inf\left(A_{>0}\right)$ vaut 0 ou 1.

   Par l'absurde : si $\gamma \notin \{0, 1\}$, alors $A = \gamma\mathbb{Z}$ et d'après la question précédente $\gamma = \frac{1}{k}$ avec $k \geqslant 1$, et même $k > 1$ puisqu'on a $\gamma \neq 1$. Un anneau est stable par produits, donc par puissances, donc pour tout entier n on a $\left(\frac{1}{k}\right)^n \in A$, et comme $k > 1$ on a une suite d'éléments de $A_{>0}$ de limite nulle, ce qui contredit $\gamma \neq 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\mathbb{Z} + \sqrt{n}\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +\times)$. En déduire : $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

   (a) Notons $A = \mathbb{Z} + \sqrt{n}\mathbb{Z} = \left\{a + b\sqrt{n},\ \binom{a}{b} \in \mathbb{Z}^2\right\}$. On a :

   - $0 = 0 + 0\sqrt{n} \in A$ car $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ et $1 = 1 + 0\sqrt{n} \in A$ car $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$.
   - Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(-a, -b) \in \mathbb{Z}^2$ donc $-(a + b\sqrt{n}) = (-a) + (-b)\sqrt{n} \in A$. A est stable par opposé.
   - Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(a+c, b+d) \in \mathbb{Z}^2$ donc $(a+b\sqrt{n})+(c+d\sqrt{n}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{n} \in A$. A est stable par somme.
   - Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(ac + nbd, bd + bc) \in \mathbb{Z}^2$.
     Donc $(a + b\sqrt{n})(c + d\sqrt{n}) = (ac + nbd) + (bd + bc)\sqrt{n} \in A$. A est stable par produit.

   (b) L'implication réciproque est évidente puisqu'on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

   Supposons $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et montrons $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ par l'absurde. On suppose donc $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et donc $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$ puisqu'une racine est positive. Notons $A = \mathbb{Z} + \sqrt{n}\mathbb{Z}$, on a vu que c'est un sous-anneau. De $\sqrt{n} \in A$, on tire $A \neq \mathbb{Z}$ et donc, puisque c'est un sous-anneau, A est dense dans $\mathbb{R}$.

   Maintenant notons $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \left(\mathbb{Z}^*\right)^2$. Soit $x \in A$. Par définition peut sécrire sous la forme $a + b\frac{p}{q}$ pour un certain couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et donc $x = \frac{K}{q}$ en posant $K = aq + bp \in \mathbb{Z}$. Ainsi $x \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$. Conclusion : on a $A \subset \frac{1}{q}\mathbb{Z}$, ce qui contredit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Existe-t-il un morphisme d'anneau de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$?
(Cette question est indépendante de toutes les autres.)

   Supposons qu'il en existe un, disons $f : \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$.
On a $2 = 1 + 1 = f(1) + f(1) = f(2) = f\left(\sqrt{2}^2\right) = f(\sqrt{2})^2$ donc $f(\sqrt{2}) \in \{\pm\sqrt{2}\}$ et donc, par stablité par opposé, on a $\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$. Puis $2 = a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3$ et $ab\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$ donc $a = 0$ ou $b = 0$. Si $b = 0$ alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, contradiction. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\sqrt{2} = b\sqrt{3}$ donc $\sqrt{6} = 3b \in \mathbb{Z}$, contradiction.
Conclusion : il n'y a pas de tel morphisme.

Trois résultats de densité.

5. Soit I un **intervalle fermé** et $D \subset I$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
   i/ $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D \neq \emptyset$;
   ii/ $\forall x \in I,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ a_n \to x$;
   iii/ $\forall x < y \in I,\ \exists z \in D,\ x < z < y$.
   Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que D **est dense dans** I.

   Oubli de l'énoncé (coquille) : I doit comprendre au moins deux éléments.
   $\boxed{\text{i/}\Rightarrow\text{ii/}}$ Supposons i/. Soit $x \in I$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{n}$. D'après i/ il existe $a_n \in \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[\cap D$, donc $a_n \in D$ et $|a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$. Par encadrement on a donc $a_n \to x$.

   $\boxed{\text{ii/}\Rightarrow\text{i/}}$ Supposons ii/. Soit $x \in I$. D'après ii/ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$. Par définition de la limite, tout intervalle de la forme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ comprend un élément de $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, donc de D.

   $\boxed{\text{i/}\Rightarrow\text{iii/}}$ Supposons i/. Soit $x < y \in I$ et posons $X = \dfrac{x+y}{2}$ et $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$. <u>Comme I est un intervalle</u>, on a $X \in I$. D'après i/ il existe donc $z \in D$ tel que $x = X - \varepsilon < z < X + \varepsilon = y$.

   $\boxed{\text{iii/}\Rightarrow\text{i/}}$ Supposons iii/. Soit $x \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme I est un intervalle comprenant au moins deux éléments, x ne peut être simultanément l'extrémité gauche et l'extrémité droite de I. Supposons que x n'est pas l'extrémité droite de I (raisonnement analogue si ce n'est pas l'extrémité gauche). Il existe alors $0 < \eta < \varepsilon$ tel que $[x, x+\eta] \subset I$. On pose alors $y = x + \eta$. D'après iii/ il existe $z \in D$ tel que $x < z < y$ et en particulier $z \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D$.

6. Soit I un intervalle fermé et $D \subset I$, dense dans I. Montrer : $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \operatorname{card}\big(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D\big) = +\infty$.

   Simple variante d'un exercice déjà traité. Si x n'est pas l'extrémité droite de I, notons $y = x + \varepsilon$. Quitte à prendre une valeur plus petite pour ε, on peut supposer $y \in I$. On définit la suite z_n par $z_0 = x$ et $z_1 = y$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+2}$ est un élement de D dans l'intervalle $]z_n, z_{n+1}[$ donné par iii/ pour $x = z_n$ et $y = z_{n+1}$.
   De façon immédiate : $\begin{cases} \forall n, z_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D \\ \forall n, \forall m, z_n \neq z_m \end{cases}$ et $\{z_n, n \geqslant 2\}$ est bien infini.
   Si x est l'extrémité droite (ou plus généralement si ce n'est pas l'extrémité gauche), on travaille à gauche au lieu de travailler à droite.

7. Soient I et J des intervalles fermés, soit $D \subset I$ et soit $f : I \to J$, continue et surjective.
   Montrer que, si D est dense dans I, alors son image directe $f(D)$ est dense dans J.

   Soit $y \in J$. Par surjectivité il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Comme D est dense dans I il existe une suite $(a_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Par continuité de f la suite $f(a_n)_n$ converge vers $f(x) = y$. Enfin, par définition d'une image directe, cette suite est à valeurs dans $f(D)$. Donc d'après ii/ on a bien $f(D)$ dense dans J.

Deux résultats sur la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

8. *Divergence de* $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$
   Exercice du TD, dont le corrigé a déjà été distribué.

9. *Le théorème d'approximation de Dirichlet sur un exemple*

   (a) Montrer que, pour tout entier n, il existe deux entiers $i < j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tels que $\big|\{i\pi\} - \{j\pi\}\big| \leqslant \frac{1}{n}$.

   Je suis l'indication. Fais un dessin, ça aide.
   Les $n+1$ réels $\{0x\}$, $\{1x\}$, $\{2x\}$, …, $\{nx\}$ appartiennent tous à $[0, 1[$. Ce sont nos chaussettes.
   Les n intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right[$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$, …, $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right[$ ont pour réunion $[0, 1[$. Ce sont nos tiroirs.
   D'après le principe des tiroirs, il existe $i < j \in \{0, \ldots, n\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\{ix\}, \{jx\} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$ et en particulier $\big|\{i\pi\} - \{j\pi\}\big| < \frac{1}{n}$ (on a donc aussi l'inégalité large).

(b) En déduire que, pour tout entier n, il existe deux entiers p et q tels que $\left|p - q\pi\right| \leqslant \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Bon, il faut supposer $n \geqslant 1$ quand même...
D'après la question précédente, il existe $i < j \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|\{j\pi\} - \{i\pi\}\right| \leqslant \frac{1}{n}$ *i. e.* $\left|\lfloor j\pi \rfloor - \lfloor i\pi \rfloor + ix - jx\right| \leqslant \frac{1}{n}$ *i. e.* $\left|p - qxbig\right| \leqslant \frac{1}{n}$ en posant $q = (j - i) \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor j\pi \rfloor - \lfloor i\pi \rfloor \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire qu'il existe deux suites $(p_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $p_n - q_n\pi \to 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe, d'après la question suivante, deux entiers naturels p_n et q_n tels que $\left|p_n - q_n\pi\right| \leqslant \frac{1}{n}$. On a donc bien défini deux suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ qui vérifient la propriété demandée d'après le TdG.

Remarque culturelle : le fait que π soit π n'est intervenu nulle part ici. On a donc, pour tout réel x, des suites d'entiers relatifs (et même naturels si $x > 0$) $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ telle que $|p_n - q_n x| \to 0$. En particulier $p_n/q_n \to x$ et on retrouve la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, mais le résultat de Dirichlet est beaucoup plus fort parce que $p_n/q_n \to x$ n'implique pas en général $|p_n - q_n x| \to 0$.

On admet que la suite $(p_n)_n$ obtenue vérifie $p_n \to +\infty$. Cela résulte de l'irrationnalité de π (on l'a vu en TD).

10. *Deux valeurs d'adhérence explicites*

(a) Montrer que la suite $(p_n)_n$ obtenue dans la question précédente vérifie $\cos(2p_n) \to 1$.

Par PAL : $2p_n - 2q_n\pi\pi \to 0$.
Par 2π-périodicité puis continuité de cos : $\cos(2p_n) = \cos(2p_n - 2q_n\pi) \to \cos(0) = 1$.

(b) Montrer que la suite $(p_n)_n$ obtenue dans la question précédente a une sous-suite strictement croissante.

Toute suite de limite $+\infty$ a une sous-suite strictement croissante, cest un exercice de la feuille sur les suites corrigé en séance.

(c) En déduire que le réel 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons $p_{\phi(n)}$ la sous-suite strictement croissante trouvée à la question précédente. Par composée d'applications strictement croissantes : $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2p_{\phi(n)} \end{array}\right.$ est strictement croissante, *i. e.* c'est une extractrice. Par suite $\cos(2p_n) = \cos(\varphi(n))$ est une sous-suite de $(\cos(n))_n$ et on a vu que cette sous-suite converge vers 1. Ainsi 1 est bien une valeur d'adhérence.

On montrerait avec les mêmes idées que -1 est une valeur d'adhérence de la suite. On l'admet ici.

Valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$

11. Dans cette question on montre que $\cos(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1, 1]$.

(a) Montrer les égalités entre images directes suivantes : $\cos(\mathbb{N}) = \cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$.

• Les inclusions $\cos(\mathbb{N}) \subset \cos(\mathbb{Z}) \subset \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ proviennent de la croissance de l'application « image directe par cos » pour l'inclusion.
• Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\cos(n) \in \cos(\mathbb{N})$ par définition. Sinon $-n \in \mathbb{N}$ et donc par parité $\cos(n) = \cos(-n) \in \cos(\mathbb{N})$ par définition. D'où $\cos(\mathbb{Z}) \subset \cos(\mathbb{N})$.
• Soit $x = a + 2\pi b \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Alors par 2π-périodicité $\cos(x) = \cos(a + 2\pi b) = \cos(a) \in \cos(\mathbb{Z})$ par définition.

(b) Justifier que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et en déduire que $\cos(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1,1]$.
On pourra utiliser la question 7.

• On a :

⇝ $0 = 0+0\cdot 2\pi \in \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ car $(0,0)\in\mathbb{Z}^2$.

⇝ Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, on a $(-a,-b)\in\mathbb{Z}^2$ donc $-(a+2b\pi) = (-a)+(-b)\pi \in \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est stable par opposé.

⇝ Soient $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}^2$, on a $(a+c,b+d)\in\mathbb{Z}^2$ donc $(a+2b\pi)+(c+2d\pi) = (a+c)+2(b+d)\pi \in \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est stable par somme.

Et donc $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

• S'il était de la forme $\gamma\mathbb{Z}$ on aurait $1\in\gamma\mathbb{Z}$ donc il existerait un entier $k\geqslant 1$ tel que $\gamma = \frac{1}{k}$. On aurait aussi $2\pi \in \gamma\mathbb{Z} = \frac{1}{k}\mathbb{Z}$ donc il existerait un entier r tel que $2\pi = \frac{r}{k}\in\mathbb{Q}$. Contradiction.
$\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ qui n'est pas de la forme $\gamma\mathbb{Z}$, il est donc dense dans $\mathbb{R}$.

• D'après le cours l'application $\cos : \mathbb{R}\to[-1,1]$ est surjective et continue, donc comme $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, d'après la question 7, $\cos(\mathbb{N}) = \cos(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1,1]$.

12. En déduire que tout réel $\ell \in]-1,1[$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

On pourra utiliser la question 6 et la deuxième caractérisation des valeurs d'adhérence.

Soit $x\in]-1,1[$. *NB : on pourrait prendre $x\in[-1,1]$... l'esprit du sujet est semble-t-il de traiter à part, dans la partie précédente, le cas de ces deux réels, je ne les considère donc pas ici.*

Soit $\varepsilon>0$. Par densité de $\cos(\mathbb{N})$ dans $[-1,1]$, et d'après la question 6, il existe une infinité d'éléments de $\cos(\mathbb{N})$ dans $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$.

Si $\mathrm{card}(\{n,\ \cos(n)\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\})$ était fini, alors $\cos(\mathbb{N})\cap]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ le serait aussi (il est inférieur avec égalité ssi $\cos_{|\mathbb{N}}$ est injective), et on vient de voir que ce n'est pas le cas. Donc $\mathrm{card}(\{n,\ \cos(n)\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\})$ est infini et x est une valeur d'adhérence de cos.

13. Finalement, quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$?

On a vu que tous les réels de l'intervalle $[-1,1]$ sont des valeurs d'adhérence de la suite. S'il y en avait une autre, disons ℓ, alors, on aurait $\ell>1$ ou $\ell<-1$. Montrons que le cas $\ell>1$ est impossible (l'autre cas est analogue). Posons $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$. Si $\ell>1$ alors $\varepsilon>0$ et donc il existe une infinité de termes de la suite dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$. On a donc une infinité de cosinus strictement supérieurs à 1, niet.

Conclusion : l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[-1,1]$.