Devoir Surveillé, $n°2$

Samedi 29 septembre 2018 – Corrigé

Exercice 1. Du cours ou de l'info

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

   Traité en cours à l'aide du binôme de Newton, $\boxed{\text{ça fait } 2^n}$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On **admet** qu'on a $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

   a. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. On pourra habilement faire apparaître un télescopage.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$.

   a. Fait en cours, $\boxed{\text{on trouve } \ln(n+1)}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout entier $k \geqslant 1$: $\ln(1+\frac{1}{k}) \leqslant \frac{1}{k}$ d'après le résultat admis. En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, *i. e.* $\ln(n+1) \leqslant H_n$. D'après le *théorème de divergence par minoration*[1], on conclut $\boxed{H_n \to +\infty}$.

3. Donner l'écriture en base 10 de l'entier dont l'écriture en base 2 est $\overline{101011}^2$, puis l'écriture en base 2 de l'entier dont l'écriture en base 10 est 1234.

   On a $\boxed{\overline{101011}^2 = 1+2+8+32 = 43}$.
   En enchaînant les divisons euclidiennes par 2, on trouve :
   $1234 = 2 \times 617 + \mathbf{0}$;
   $617 = 2 \times 308 + \mathbf{1}$;
   $308 = 2 \times 154 + \mathbf{0}$;
   $154 = 2 \times 77 + \mathbf{0}$;
   $77 = 2 \times 38 + \mathbf{1}$;
   $38 = 2 \times 19 + \mathbf{0}$;
   $19 = 2 \times 9 + \mathbf{1}$;
   $9 = 2 \times 4 + \mathbf{1}$;
   $4 = 2 \times 2 + \mathbf{0}$;
   $2 = 2 \times 1 + \mathbf{0}$;
   $1 = 2 \times 0 + \mathbf{1}$;
   et donc $\boxed{1234 = \overline{10011010010}^2}$.

4. Disons pour faire simple que les flottants sont codés sur 16 bits, le premier bit étant le bit de signe, les 6 suivants les bits de l'exposant, ce qui reste étant destiné à la mantisse. L'exposant 0 est codé par 100000. Donner le codage de 0.24. Ce codage est-il fidèle ?

   • Le nombre est positif donc le bit de signe est 0.

   Pour trouver l'exposant on multiplie par 2 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 1 :
   $0.24 \times 2 = 0.48 < 1$.
   $0.48 \times 2 = 0.96 < 1$.
   $0.94 \times 2 = 1.92 > 1$.
   Donc l'exposant est -3 et comme on a convenu de coder l'exposant nul par 100000, notre exposant se code 011101.

1. Je déconne. D'après le théorème des gendarmes.

On détermine la mantisse :
$0.92 \times 2 = \mathbf{1}.84$.
$0.84 \times 2 = \mathbf{1}.68$.
$0.68 \times 2 = \mathbf{1}.36$.
$0.36 \times 2 = \mathbf{0}.72$.
$0.72 \times 2 = \mathbf{1}.44$.
$0.44 \times 2 = \mathbf{0}.88$.
$0.88 \times 2 = \mathbf{1}.76$.
$0.76 \times 2 = \mathbf{1}.52$.
$0.52 \times 2 = \mathbf{1}.04$.
Et on s'arrête car on a nos 9 bits (mais on a dû tronquer, on n'est pas arrivé à 1.00).

Finalement, $\boxed{\text{le codage est } 0011101111010111}$.

• On a dû tronquer la mantisse, $\boxed{\text{ce codage n'est donc pas fidèle}}$ (un autre argument est que 0.24 a pour écriture fractionnaire irréductible $\frac{6}{25}$ qui n'est pas de la forme $\frac{M}{2^n}$).

Exercice 2. Formule de Hutton

Dans cet exercice, on note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$. Le but de cet exercice est d'expliciter la quantité $2\alpha + \beta$. Le résultat obtenu est connu sous le nom de formule de Hutton.

5. Justifier qu'on a $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$ et $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$.

   On a $\sqrt{3} > 1$ donc $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Par croissance de la fonction arctan on obtient $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$. Comme on a $0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{3}$, toujours par croissance de la fonction arctan, on déduit $0 < \beta < \alpha$ et en particulier $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$.

6. En déduire la valeur de $\tan(2\alpha + \beta)$.

   De la question précédente, on déduit qu'on a $2\alpha + \beta \not\equiv \pi/2\ [\pi]$, la tangente de $2\alpha + \beta$ a donc bien un sens. De plus, on a $2\alpha \not\equiv \pi/2\ [\pi]$ et $\beta \not\equiv \pi/2\ [\pi]$, on peut donc appliquer la formule exprimant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$. On trouve $\tan(2\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(2\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(2\alpha)\tan(\beta)} = \dfrac{\tan(2\alpha) + 1/7}{1 - \tan(2\alpha)/7}$.
   Mais on a $\alpha \not\equiv \pi/2\ [\pi]$, on peut donc appliquer la formule exprimant $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$. On trouve $\tan(2\alpha) = 2\dfrac{\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = 2\dfrac{1/3}{1 - 1/9} = \dfrac{3}{4}$.
   En conclusion on trouve $\tan(2\alpha + \beta) = \dfrac{3/4 + 1/7}{1 - (3/4)/7} = 1$.

7. Conclure soigneusement.

   On vient de voir que $2\alpha + \beta$ est un réel appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc en particulier à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) dont la tangente vaut 1. Or on sait qu'il existe un unique réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est 1 : par définition, c'est arctan(1).
   En conclusion : $2\alpha + \beta = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Une suite de polynômes très connue...

Pour tout entier naturel n on définit une fonction T_n sur $[-1,1]$ de la façon suivante :

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

8. Pour $n \in \{0,1,2,3\}$ et $x \in [-1,1]$, donner une expression la plus simple possible de $T_n(x)$.

   Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
   En l'appliquant avec $\theta = \arccos(x)$ on trouve $\boxed{T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x}$.

9. Résoudre, pour tout $n \geqslant 0$, l'équation $T_n(x) = 0$.

   On a $T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$ et donc $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

   $n\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ équivaut à $\arccos(x) = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}$. Pour qu'une telle égalité puisse avoir lieu, il faut que $\dfrac{\pi+2k\pi}{2n}$ soit dans l'image de la fonction arccos, à savoir $[0,\pi]$. Ceci équivaut à $0 \leqslant \pi + 2k\pi \leqslant 2n\pi$, soit $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{2n-1}{2}$ ou encore $k \in \{0, \cdots, n-2, n-1\}$.

   Pour une telle valeur de k, on peut alors écrire $x = \cos(\arccos(x)) = \cos\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)$.

   $\boxed{S = \left\{\cos\left(\dfrac{\pi+2k\pi}{2n}\right),\ k \in \{0, \cdots, n-2, n-1\}\right\}}$.

10. Montrer qu'on a, pour tout entier n : $\forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

    Soit $x \in [-1,1]$. Notons $y = \arccos(x)$, il vient

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)y) + \cos((n-1)y)\\
&= \cos(ny + y) + \cos(ny - y)\\
&= \cos(ny)\cos(y) - \sin(ny)\sin(y) + \cos(ny)\cos(y) + \sin(ny)\sin(y)\\
&= 2\cos(y)\cos(ny)\\
&= 2\cos(\arccos(x))\cos(n\arccos(x))\\
&= \boxed{2T_1(x)T_n(x) \ = \ 2xT_n(x)}.
\end{aligned}$$

11. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les fonctions T_n et T_{n+1} sont polynomiales.

    Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « les fonctions T_n et T_{n+1} sont polynomiales ». On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ pc_n$, une récurrence s'impose.
    Initialisation : On a vu dans la question 8 que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie (comme aussi d'ailleurs $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

    Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$. Ainsi T_{n+1} est polynômiale donc $x \mapsto 2xT_{n+1}(x)$ l'est aussi comme produit de fonctions polynomiales ; et T_n l'est aussi donc $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ l'est aussi, comme différence de fonctions polynomiales.

    La propriété est donc bien héréditaire.

    Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que T_n est dérivable et que sa dérivée T_n' est continue sur $[-1,1]$ (T_n est une application polynomiale donc indéfiniment dérivable).

12. On souhaite maintenant calculer $T_n'(1)$.
    a. Justifier, brièvement mais proprement, qu'on a $\forall \theta \in [0,\pi],\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
    b. En déduire, pour $\theta \in]0,\pi[$, une expression de $T_n'(\cos(\theta))$, puis calculer $T_n'(1)$.

    a. Soit $\theta \in [0,\pi]$. Notons $y = \arccos(\cos(\theta))$; par définition y est l'unique réel de $[0,\pi]$ tel que $\cos(y) = \cos(\theta)$, or θ est précisément un réel de $[0,\pi]$ vérifiant la même propriété. Donc $y = \theta$ par unicité, puis $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\arccos(\cos(\theta))) = \cos(ny) = \cos(n\theta)$.

b. On a $\forall \theta \in [0,\pi]\ T_n(cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. En dérivant et à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient $\forall \theta \in [0,\pi]\ \ -\sin(\theta) f_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$.

Ceci est en particulier vrai pour $\theta \in]0,\pi[$, intervalle sur lequel $\sin(\theta)$ ne s'annule pas, ce qui permet d'écrire $\forall \theta \in]0,\pi[\ T_n'(\cos(\theta)) = \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n^2\dfrac{\sin(n\theta)}{n\theta}\dfrac{\theta}{\sin(\theta)} \to n^2 \times 1 \times 1 = n^2$ d'après le cours.

Comme T_n' est continue, on a $\boxed{T_n'(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} T_n(t) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} T_n(\cos(\theta)) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n^2}$, la seconde égalité provenant d'un changement de variable.

Micro-problème 4. Classement de joueurs de Go...

Quatre joueurs de Go notés A, B, C et D se sont affrontés les uns les autres un certain nombre de fois. Dans le tableau suivant, on synthétise le nombre de parties remportées par chaque joueur contre un autre : le nombre en ligne X colonne Y indique le nombre de parties que X a remporté contre Y. Ainsi, par exemple, le joueur B a remporté quatre parties contre le joueur C, alors que le joueur C a remporté une seule partie contre le joueur B.

Joueurs	A	B	C	D
A		1	2	1
B	0		4	1
C	2	1		1
D	2	1	0	

On appellera **bilan du joueur X contre le joueur Y** la différence entre le nombre de victoires de X sur Y et le nombre de victoires de Y sur X. Ainsi, le bilan de B contre C est 3 alors que le bilan de C contre B est -3.

Le but de ce micro-problème est de discuter de diverses méthodes permettant d'attribuer à chaque joueur une note strictement positive, de telle sorte que la note d'un joueur permette de quantifier raisonnablement son niveau par rapport aux autres joueurs.

13. On dira qu'un joueur X est **plus fort** qu'un joueur Y lorsque le nombre de victoires de X sur Y est supérieur [2] au nombre de victoires de Y sur X, c'est-à-dire lorsque le bilan de X contre Y est positif[1].
La relation « être plus fort que » est-elle transitive ?
Peut-on attribuer les notes de sorte qu'un joueur strictement plus fort qu'un autre ait toujours une note strictement supérieure ?

Elle n'est pas transitive. Montrons-le par l'absurde : supposons qu'elle soit transitive. Comme D est strictement plus fort que A qui est strictement plus fort que B qui est strictement plus fort que C, on obtiendrait que, D serait plus fort que C. Or C est strictement plus fort que D, contradiction.

Notons x, y, z et t les notes respectives de A, B, C, D. Pour respecter la relation « être plus fort que », les notes doivent vérifier $t \leqslant z \leqslant y \leqslant x \leqslant t$ et donc $x = y = z = t$. Ce n'est pas très intéressant. Si en plus on demande à ce qu'un joueur strictement plus fort qu'un autre ait une note strictement supérieure, ce n'est plus possible.

14. Résoudre le système $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ y-4z=1 \\ 2x+y=1. \end{cases}$ En déduire les solutions du système $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ y-4z=1 \\ 2x+y=1 \\ 2x+y-z=-1. \end{cases}$

Gauss échelonne le premier système en $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ y-4z=1 \\ 16z=-4 \end{cases}$. Solution unique $x=\frac{1}{2},\ y=0,\ z=\frac{-1}{4}$.

2. Au sens large évidemment, nous sommes en France.

En substituant dans la dernière équation du deuxième on trouve $2 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - \left(\frac{-1}{4}\right) = 1$, c'est-à-dire $\frac{5}{4} = -1$. Ça se saurait. Le deuxième système n'a donc pas de solution.

15. On propose une première méthode pour attribuer des notes aux joueurs : la note d'un joueur sera la somme de ses bilans contre les autres joueurs, augmentée d'une quantité k permettant à toutes les notes de rester strictement positives. Quelles sont les valeurs de k convenables ?

    On calcule la somme des bilans de chaque joueurs. En notant x, y, z et t les sommes des bilans respectives de A, B, C et D on a $x = 0$, $y = 2$, $z = -2$, $t = 0$. Les k convenables sont donc les réels de l'intervalle $]2, +\infty[$.

La méthode précédente a un gros défaut : toutes les victoires rapportent autant de points. Cela n'est pas juste : une victoire contre un adversaire fort devrait rapporter davantage de points qu'une victoire contre un adversaire plus faible. On propose donc une seconde méthode pour attribuer des notes aux joueurs : la note de chaque joueur J sera $n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$, où n_1, n_2 et n_3 sont les notes des trois autres joueurs et où v_1, v_2 et v_3 sont les nombres de victoires remportées par J face aux trois joueurs correspondants.
Dans les questions 16 à 18, on note x, y, z, t des notes respectives de A, B, C, D obtenues à l'aide d'une telle méthode, s'il en existe.

16. Expliciter les relations vérifiées par x, y, z, et t.

    Pour $J = A$: $x = 1y + 2z + 1t$.
    Pour $J = B$: $y = 0x + 4z + 1t$.
    Pour $J = C$: $z = 2x + 1y + 1t$.
    Pour $J = D$: $t = 2x + 1y + 0z$.
    On obtient donc les quatre relations suivantes : $\begin{cases} x - y - 2z = t \\ y - 4z = t \\ 2x + y - z = -t \\ 2x + y = t. \end{cases}$

17. Justifier que s'il existe un quadruplet de telles notes (x, y, z, t), alors il existe un autre quadruplet de telles notes tel que $t = 1$.

    Un quadruplet est solution si et seulement si il est solution du système 4×4 précédent. Mais les notes sont supposés strictement positives, on peut donc considérer $x' = \frac{x}{t}$, $y' = \frac{y}{t}$, $z' = \frac{z}{t}$, $t' = 1$. En divisant chaque ligne du système précédent par t, on obtient que (x', y', z', t') est également solution, donc est aussi un quadruplet de notes convenables, mais pour lequel la note de D est 1.

18. En déduire qu'il n'existe pas de telles notes.

    Le notes pour lesquelles t vaut 1 vérifient le deuxième système de la question 14, dont on a vu qu'il n'avait pas de solution. Il n'existe donc pas de telles notes avec $t = 1$, puis, par la question précédente, il n'existe pas de telles notes.

Essayons de sauver la méthode précédente : ce qui compte dans l'idée qu'on a présentée, c'est que la note de chaque joueur J soit (positivement) proportionnelle à $n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$, avec bien sûr un coefficient de proportionnalité identique pour chaque joueur. Dans les questions 19 à 20, on note $K > 0$ ce coefficient de proportionnalité, on note $\lambda = \frac{1}{K}$, et on note enfin x, y, z, t des notes respectives de A, B, C, D obtenues à l'aide d'une telle méthode. De même que dans les questions précédentes, on peut supposer avoir $t = 1$, ce que l'on fait donc dans la suite.

19. Expliciter les relations vérifiées par x, y, z, et λ.

    Pour $J = A$: $x = K(1y + 2z + 1t)$.
    Pour $J = B$: $y = K(0x + 4z + 1t)$.
    Pour $J = C$: $z = K(2x + 1y + 1t)$.
    Pour $J = D$: $t = K(2x + 1y + 0z)$.

Comme on a $t = 1$, on obtient donc les quatre relations suivantes : $\begin{cases} \lambda x - y - 2z = 1 \\ \lambda y - 4z = 1 \\ 2x + y - \lambda z = -1 \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$.

20. Montrer qu'il existe bien un unique $K > 0$ et un unique triplet (x, y, z) de telles notes.

    Avant d'appliquer le pivot de Gauss, on prend soin de réordonner les variables, par exemple dans l'ordre y, x, z, afin que les calculs soient moins lourds.

    Gauss échelonne alors le système en $\begin{cases} 1y + 0x + 2z = \lambda \\ 0y + 2\lambda x + 4z = (\lambda+1)(\lambda-1) \\ 0y + 0x + \lambda z = \lambda + 1 \\ 0y + 0x + 0z = (\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda-4) \end{cases}$.

    Pour qu'il existe des solutions, il est nécessaire que la dernière ligne soit $0 = 0$. Mais comme un produit de facteurs est nul si et seulement si chacun de ses facteurs est nul, cela implique $\lambda \in \{-2, -1, 4\}$, et comme $\lambda = \frac{1}{K} > 0$, cela implique $\lambda = 4$. On a donc au plus un réel K convenable qui est $K = \frac{1}{4}$ et qui correspond à $\lambda = 4$. Mais ce réel convient puisqu'on trouve alors une unique solution pour (x, y, z) qui est $x = \frac{5}{4} = z, \ y = \frac{3}{2}$.

La méthode précédente a encore un défaut, qui est de tenir compte des victoires uniquement, mais pas des défaites.

21. Montrer qu'en remplaçant les victoires par les bilans dans la méthode précédente, alors il n'existe plus de coefficient $K > 0$ permettant d'obtenir des notes.

    Le système est alors $\begin{cases} x = K(y - t) \\ y = K(-x + 3z) \\ z = K(-3y + t) \\ t = K(x - y) \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ x + \lambda y - 3z = 0 \\ 3y + \lambda z = 1 \\ x - y = \lambda \end{cases}$ en tenant compte de $\lambda = \frac{1}{K}$ et $t = 1$.

    Les première et dernière équations donnent un système 2×2 en x et y de déterminant $1 - \lambda$.

    Traitons deux cas :

    - Si $\lambda = 1$, le système 2×2 n'a aucune solution, et par suite il n'existe aucune solution (x, y, z, t).
    - Si $\lambda \neq 1$ ces deux équations donnent (par exemple avec les formules de Cramer) : $x = \frac{\lambda+1}{1-\lambda}, \ y = \frac{\lambda^2+1}{1-\lambda}$. En réinjectant dans $3y + \lambda z = 1$, on obtient $z = \frac{3\lambda^2+\lambda+2}{\lambda(\lambda-1)}$ ($\lambda = \frac{1}{K}$ donc il est non nul). Enfin, en réinjectant dans la dernière équation, on trouve $(\lambda^2 + 6 - 4\sqrt{2})(\lambda^2 + 4\sqrt{2} + 6) = 0$ et comme $6 - 4\sqrt{2}$ et $6 + 4\sqrt{2}$ sont > 0, il n'existe aucun tel λ, et par suite aucun tel K, et par suite aucune solution (x, y, z, t).