Devoir Surveillé $n°2$

Corrigé

Exercice 1. *CCP*

Cf banque officielle.

Exercice 2. *Quelques calculs*

1. On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par : $\left\{\begin{array}{l} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{array}\right.$.

   a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

   Montrons-le par récurrence simple.

   Initialisation : Pour $n = 1$ on a $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = F_2F_0 - F_1^2 = 2 \times 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1 = (-1)^n$. La propriété est vraie au rang 1.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons
   $$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$
   En opposant cette égalité on obtient :
   $$(-1)^{n+1} = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}.$$
   En substituant $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ dans l'égalité précédente :
   $$(-1)^{n+1} = F_n^2 - F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n = F_n^2 + F_{n+1}F_n - F_{n+1}^2.$$
   Enfin en factorisant par F_n :
   $$(-1)^{n+1} = (F_n + F_{n+1})F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2.$$
   La propriété est donc bien héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

   b. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, calculer $F_n \wedge F_{n-1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Notons $u = (-1)^n F_{n+1}$ et $v = ((1)^{n+1}F_n$. On vient de montrer qu'on a $uF_{n-1}+vF_n = 1$, donc $\boxed{\text{d'après le théorème de Bézout, on a } F_{n-1} \wedge F_n = 1}$.

2. Étudier $x \mapsto \arctan\left(\left|\mathrm{sh}(x)\right|\right) - \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$ sur son domaine de définition, que l'on déterminera.

Notons-la f.
• $f_1 = x \mapsto \arctan\left(\left|\mathrm{sh}(x)\right|\right)$ est une composée de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.
• $f_2 = x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$ est définie sur $\left\{x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \in D_{\arccos}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, \ -1 \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \leqslant 1\right\} = \mathbb{R}$ car on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1$.
• Par différence, $f = f_1 - f_2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
• Sur $\mathbb{R}$, f est une différence de composées de fonctions continues donc est continue.
• Remarque : comme en 0 (et seulement en 0) la fonction ch prend une valeur dans $\{\pm 1\}$ (en l'occurence 1) et qu'en ± 1 (et seulement en ± 1) la fonction arccos n'est pas dérivable, on ne sait pas si f_1 est dérivable en 0.
De même, comme en 0 (et seulement en 0) la fonction sh prend la valeur 0 et qu'en 0 (et seulement en 0) la fonction $|\,|$ n'est pas dérivable, on ne sait pas si f_2 est dérivable en 0.
Ainsi, on ne sait pas si f est dérivable en 0.
Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, par contre, f est une différence de composées de fonctions dérivables donc est dérivable.

Plutôt que d'étudier f sur $\mathbb{R}$ directement, deux remarques de bon sens :

i/ f est clairement paire : il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$;

ii/ f est continue en 0 (puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R}$) : il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$ on a $f(x) = \arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big) - \arccos\big(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\big)$, qu'on dérive à coup de dérivées usuelles.

On trouve $f' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un intervalle.

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par parité, elle est constante sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, f est continue en 0 donc elle est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme on a $f(0) = \arctan(0) - \arccos(1) = 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$!

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

   On fixe un entier $n \geqslant 1$. Calculer $(n+1)H_n - \sum_{j=1}^{n} H_j$.

   On Fubinise :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} H_j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=i}^{n} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}(n-i+1)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{i} - 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - n \\
&= (n+1)H_n - n
\end{aligned}$$

   Par suite : $\boxed{(n+1)H_n - \sum_{j=1}^{n} H_j = (n+1)H_n - ((n+1)H_n - n) = n}$.

Exercice 3. *Une application de la formule de Leibniz*

Dans cet exercice on considère une éventuelle solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $(E)\ \ x^2y' + y = x^2$. On notera que ce n'est pas une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il n'est pas demandé d'expression de y ni de justifier son existence ou son unicité. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = y^{(n)}(0)$.

1. Montrer la *formule de Leibniz* : pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

   Cf cours.

2. Calculer u_0, puis calculer u_1 et u_2.
On pourra dériver un certain nombre de fois l'équation (E).

En évaluant en 0 : $\boxed{u_0 = 0}$.

En dérivant puis en évaluant en 0 : $\boxed{u_1 = 0}$.

En dérivant deux fois en évaluant en 0 : $\boxed{u_2 = 2}$.

3. Déterminer trois expressions $f(x)$, $g(n,x)$ et $h(n)$ telles que

$$\forall n \geqslant 3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)y^{(n+1)}(x) + g(n,x)y^{(n)}(x) + h(n)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz. L'expression $f(x)$ doit seulement dépendre de x, l'expression $h(n)$ doit seulement dépendre de n, et l'expression $g(n,x)$ dépend de x et de n.

On dérive n fois l'équation (E) en utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\left(x^2y\right)^{(n)}$ et en observant bien que les dérivées de "x^2" sont toutes nulles à partir de la troisième !
On obtient $\boxed{f(x) = x^2,\ g(n,x) = 1 + 2nx \text{ et } h(x) = n(n-1)}$.

4. En déduire, pour $n \geqslant 3$, une expression de u_n en fonction de u_{n-1}.

En évaluant en 0 après avoir dérivé n fois : $\boxed{u_n = -n(n-1)u_{n-1}}$.

5. En déduire une expression directe de u_n pour $n \geqslant 2$. *On pourra utiliser la factorielle.*

Pour $n \geqslant 3$ on a $u_n = (-1)(n)(n-1)(-1)(n-1)(n-2)\cdots(-1)(3)(2)u_2 = (-1)^{n-2}(n)((n-1)!)^2$
i. e. $\boxed{u_n = (-1)^n n!(n-1)!}$.

6. En déduire, pour tout entier n, le $DL_n(0)$ de y. *Cette réponse devra être justifiée.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, y est supposée $\mathcal{C}^\infty$, en particulier elle est $\mathcal{C}^n$ et donc, d'après le théorème de Taylor-Young, son $DL_n(0)$ existe et c'est $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \ + \ x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k(k-1)!\ x^k \ + \ x^n\varepsilon(x)}$, où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Problème 4. *Une application des développements limités*

I. Étude d'une fonction.

Pour tout réel x pour lequel cela a un sens, on note $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

1. Donner le domaine de définition D_C de C.

$$\boxed{D_C = \left\{x \in R, 1-4x \geqslant 0 \text{ et } 2x \neq 0\right\} = \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right] \setminus \left\{0\right\}}.$$

2. Montrer que C a un prolongement par continuité en 0.
Dans toute la suite, on note encore C la fonction prolongée.

On peut utiliser la quantité conjuguée :

$$C(x) = \frac{\left(1-\sqrt{1-4x}\right)\left(1+\sqrt{1-4x}\right)}{2x\left(1+\sqrt{1-4x}\right)} = \frac{1-(1-4x)}{2x\left(1+\sqrt{1-4x}\right)} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{1+\sqrt{1}} = 1.$$

Conclusion : C se prolonge par continuité en 0 en posant $\boxed{C(0) = 1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner sans démonstration le $DL_{n+1}(0)$ de $\sqrt{1+x}$.

C'est le DL usuel de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\sqrt{1+x} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{1/2}{k} x^k\right) + x^{n+1}\varepsilon(x)} \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On peut être consciencieux et calculer les $\binom{1/2}{k} = \dfrac{1/2(-1/2)(-3/2)\dots((3-2k)/2)}{k!}$. Pour $k \geqslant 1$:

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}(1\times 3\times\cdots\times(2k-3))}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}(1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(2k-3)\times(2k-2))}{2^k k!(2\times 4\cdots\times(2k-2))}$$

i. e. $\displaystyle\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k! 2^{k-1}(1\times 2\cdots\times(k-1))} = 2\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$.

b. En déduire le $DL_n(0)$ de $\sqrt{1-4x}$.

Par composition : $\boxed{\sqrt{1-4x} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{1/2}{k} 4^k(-1)^k x^k\right) + x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x)}$ où $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Là encore, pour $k \geqslant 1$: $\displaystyle\binom{1/2}{k} 4^k(-1)^k = -2\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$.

c. En déduire que C a un $DL_n(0)$ que l'on précisera.

On utilise les règle de calcul sur les DL. Il vient : $C(X) = \dfrac{-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{1/2}{k}4^k(-1)^k x^k + x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x)}{2x} =$
$\displaystyle -\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2}\binom{1/2}{k}4^k(-1)^k x^{k-1} + x^n\hat{\varepsilon}(x) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\binom{1/2}{k+1}4^{k+1}(-1)^{k+1}x^k + x^n\hat{\varepsilon}(x)$.

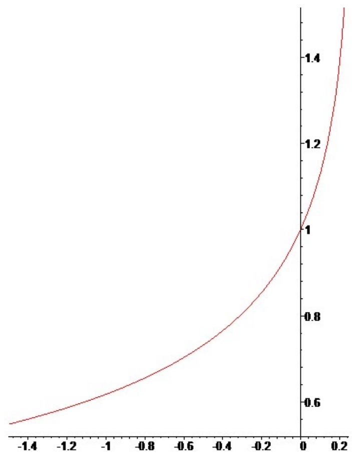
Et là encore, on peut l'écrire $\displaystyle C(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k+1)!k!}x^k + x^n\hat{\varepsilon}(x)$ ou encore, car on l'a reconnu : $\displaystyle C(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}x^k + x^n\hat{\varepsilon}(x)$.

d. En déduire en particulier que C est dérivable en 0. Quelle est sa dérivée en 0 ?

En particulier pour $n = 1$: $C(x) = 1 + x + x\varepsilon_1(x)$ et donc sachant qu'on a $C(0) = 1$ il devient clair que le taux d'accroissement de C en 0 tend vers 1 : $\boxed{C'(0) = 1}$.

4. Étudier C (dérivée, tableau de variations, limite, graphe).

Pas de difficulté particulière.



La fonction C est dérivable sur $D_C \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ comme quotient, de dérivée, $C' = x \mapsto \dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2\sqrt{1-4x}}$.

insi pour $x \in D_C$, on a $C'(x)$ du signe de $1-2x-\sqrt{1-4x} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4x}-1\right)^2$ donc positif, et même strictement positif sauf en 0 (qui n'appartient pas à D_C, mais on a identifié C à son prolongement par continuité). La fonction C est donc strictement croissante sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\left]0, \frac{1}{4}\right[$, et son prolongement par continuité (avec lequel on l'identifie) étant continu en 0 et $\frac{1}{4}$, on peut dire que C est strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$, avec une tangente verticale en $\frac{1}{4}$ puisque sa dérivée y tend vers l'infini.

Restent les limites : on a $C(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ en factorisant par $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, et $C(x) \underset{x\to\frac{1}{4}}{\longrightarrow} C\left(\frac{1}{4}\right) = 2$.

II. Mots binaires, mots bien parenthésés.

On s'intéresse aux **mots binaires** qui sont les suites finies de symboles formées uniquement à l'aide deux symboles de parenthèse. On pourra les implémenter en Python comme des chaînes de caractères. Ainsi :

- Il y a un unique mot binaire de longueur 0, le mot vide que l'on note ε. On peut l'implémenter par la chaîne vide `""`.
- Il y a quatre mots binaires de longueur 2, qu'on peut implémenter par les chaînes `"(("`, `"()"`, `")("` et `"))"`.
- Le mot)((()(est un mot binaire de longueur 6. On peut l'implémenter par la chaîne `")((()("`.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il de mots binaires de longueur n ?

Chacun des n caractères du mot peut valoir "(" ou ")" (deux choix). $\boxed{\text{Il y en a donc } 2^n}$.

6. Que fait la fonction Python suivante ?

```
def Verifie(s):
    if type(s)!=str:
        return(False)
    n=len(s)
    for i in range(0,n):
        if s[i] != "(" and s[i] != ")":
            return(False)
    return(True)
```

Les lignes 2 et 3 testent si l'argument est bien une chaîne de caractères. Les lignes 5 à 8 testent si cette chaîne est bien composée uniquement de symboles de parenthèse.

En conclusion $\boxed{\text{cette fonction renvoie \texttt{True} si son argument est un mot binaire et \texttt{False} sinon}}$.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il de mots binaires de longueur n avec autant de "(" que de ")" ? *On distinguera deux cas.*

$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, c'est mort}}$.

Si $n = 2k$, il y a autant de mots binaires ayant k "(" et k ")" que de façons de choisir les k positions des "(". Ou, ce qui revient au même, les k positions des ")". $\boxed{\text{Il y en a donc } \binom{2k}{k} = \binom{n}{n/2}}$.

Dans toute la suite, on s'intéresse plus particulièrement aux **mots bien parenthésés**. Un mot bien parenthésé est un mot binaire $M = a_0 \dots a_{n-1}$ (les a_i sont des symboles de parenthèse) vérifiant les deux propriétés suivantes :

— $M = a_0 \dots a_{n-1}$ a autant de "(" que de ")"

— tout préfixe $P = a_0 \dots a_{k-1}$ de M a au moins autant de "(" que de ")".

On pourra utiliser sans démonstration la caractérisation équivalente suivante : l'ensemble des mots bien parenthésés est le plus petit ensemble de mots binaires (pour l'inclusion) vérifiant les propriétés suivantes :

— le mot vide est un mot bien parenthésé,

— si M et N sont des mots bien parenthésés, alors $M(N)$ est un mot bien parenthésé.

Par exemple les mots bien parenthésés de longueur 6 sont ((())), (())(), (()()), ()()(), ()(()).

Autre exemple : il n'existe aucun mot bien parenthésé de longueur impaire, puisqu'un mot bien parenthésé a autant de "(" que de ")".

8. Écrire une fonction Python prenant comme argument un mot binaire (il n'est pas nécessaire de vérifier que l'argument est bien un mot binaire) et retournant comme résultat un booléen indiquant si l'argument est ou pas bien parenthésé.

En utilisant la définition :

```
def EstBienParenthese(s):
    n = len(s)
    ouvrantes = 0
    fermantes = 0
    for i in range(0,n):
        if s[i] == "(":
            ouvrantes += 1
        elif s[i] == ")":
            fermantes += 1
        if ouvrantes < fermantes:
            return(False)
    return(ouvrantes == fermantes)
```

III. Nombres de Catalan.

Dans toute la suite, on s'intéresse à la suite des **nombres de Catalan**. Le n^e nombre de Catalan c_n est le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. Ainsi, par exemple, on a $c_3 = 5$ (voir plus haut).

9. Donner, en les justifiant, les valeurs de c_0, c_1 et c_2.

Le mot vide est le seul mot de longueur 2×0. Il est bien parenthésé, par exemple d'après la caractérisation équivalente. Donc $\boxed{c_0 = 1}$.

Un mot bien parenthésé de longueur $2 = 2\times 1$ est de la forme $M(N)$ avec M et N bien parenthésés. Comme sa longueur est 2, nécessairement $M = N = \varepsilon$. Ce qui donne exactement une solution, "()" : $\boxed{c_1 = 1}$.

Un mot bien parenthésé de longueur $4 = 2 \times 2$ est de la forme $M(N)$ avec M et N bien parenthésés. Comme sa longueur est 4 l'un des deux mots M, N est vide et l'autre de longueur 2 (et donc c'est "()"). Ce qui donne donc exactement deux solutions : "(())" et "()()" : $\boxed{c_2 = 2}$.

10. Montrer qu'a a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.

Pour construire un mot bien parenthésé de longueur $2n$, on doit :

$\rightsquigarrow$ ou bien choisir un mot bien parenthésé M de longueur 0, un mot bien parenthésé N de longueur $2(k-1)$, et former $M(N)$: $c_0 c_{k-1}$ choix ;

$\rightsquigarrow$ ou bien choisir un mot bien parenthésé M de longueur 2, un mot bien parenthésé N de longueur $2(k-2)$, et former $M(N)$: $c_1 c_{k-2}$ choix ;

$\rightsquigarrow$ ou bien choisir un mot bien parenthésé M de longueur 4, un mot bien parenthésé N de longueur $2(k-3)$, et former $M(N)$: $c_2 c_{k-3}$ choix ;

$\vdots$

$\rightsquigarrow$ ou bien choisir un mot bien parenthésé M de longueur $k-1$, un mot bien parenthésé N de longueur 0, et former $M(N)$: $c_{k-1} c_0$ choix.

Total : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$ façons de faire.

11. Écrire une fonction PYTHON qui prend comme argument un entier n et donne comme résultat c_n.

On peut proposer :

```
def Catalan(n):
    c=(n+1)*[1]
    for i in range(1,n+1):
        c[i]=sum([c[k]*c[i-1-k] for k in range(0,i)])
    return(c[n])
```

IV Expression des c_n.

On cherche maintenant une expression du n^e nombre de Catalan en fonction de n. Dans cette partie encore, C désigne la fonction étudiée dans la partie I.

12. Soit f une fonction ayant un $DL_n(0)$ que l'on notera $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de limite nulle en 0. Montrer que $x \mapsto 1 + xf(x)^2$ a un $DL_n(0)$ que l'on déterminera.

D'après le cours, $x \mapsto f(x)^2$ aura un DL obtenu en tronquant le carré du DL, et d'après l'expression des coefficients d'un produit de polynômes :

$$f(x)^2 = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\tilde{\varepsilon}(x) \text{ où pour tout } k,\ b_k = \sum_{i=0}^{k} a_ia_{k-i}$$

Par suite on a $1 + xf(x)^2 = 1 + b_0x + b_1x^2 + \cdots + b_{n-1}x^n + x^n\hat{\varepsilon}$ où pour tout $k,\ b_k = \sum_{i=0}^{k} a_ia_{k-i}$.

Autrement dit : $1 + xf(x)^2 = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + x^n\hat{\varepsilon}$ où $d_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1,\ d_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_ia_{k-1-i}$.

13. Montrer que, pour $x \in D_C$, on a $C(x) = 1 + xC(x)^2$.

Soit $x \in D_C$, on a :

$1+xC(x)^2 = \dfrac{\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^2}{4x}+1 = \dfrac{1+(1-4x)-2\sqrt{1-4x}}{4x}+\dfrac{4x}{4x} = \dfrac{2-2\sqrt{1-4x}-4x+4x}{4x} = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$\boxed{i.\,e.\ 1 + xC(x)^2 = C(x)}$.

14. En utilisant l'unicité des coefficients d'un DL, déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ l'expression de c_n en fonction de n.

On a vu qu'on avait $C(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\binom{1/2}{k+1} 4^{k+1}(-1)^kx^k + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1}x^k + x^n\varepsilon(x)$.

Notons plus simplement $C(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k + x^n\varepsilon(x)$. Comme on a $C(x) = 1 + xC(x)^2$ d'après la question 13, alors d'après la question 12 on a $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \sum_{k=0}^{n-1} a_ka_{n-1-k}$. Mais ceci est la relation de récurrence qui définit les c_n donc, par unicité d'une suite définie par récurrence forte, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = a_n$.

Autrement dit, par unicité d'un DL : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}}$.

Bien sûr que si tu as gardé tout du long l'expression binomiale pourrie je te mettrai quand même les points.