Devoir Surveillé, $n°2$

Samedi 29 septembre 2018 – *Durée : 4h00*

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants les uns des autres. **Les calculatrices sont interdites.** On tiendra fondamentalement compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Pour finir, un conseil : *commencez par lire tout le sujet* et **repérez les questions que vous pouvez faire**. Il y en a et elles sont nombreuses, il serait trop bête de vous retrouver à ne pas avoir le temps de les traiter parce que vous avez séché trop longtemps sur une question de l'enfer (j'imagine qu'il y en a aussi).

Exercice 1. Du cours ou de l'info

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On **admet** qu'on a $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

   a. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. On pourra habilement faire apparaître un télescopage.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$.

3. Donner l'écriture en base 10 de l'entier dont l'écriture en base 2 est $\overline{101011}^2$, puis l'écriture en base 2 de l'entier dont l'écriture en base 10 est 1234.

4. Disons pour faire simple que les flottants sont codés sur 16 bits, le premier bit étant le bit de signe, les 6 suivants les bits de l'exposant, ce qui reste étant destiné à la mantisse. L'exposant 0 est codé par 100000. Donner le codage de 0.24. Ce codage est-il fidèle ?

Exercice 2. Formule de Hutton

Dans cet exercice, on note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$. Le but de cet exercice est d'expliciter la quantité $2\alpha+\beta$. Le résultat obtenu est connu sous le nom de formule de Hutton.

5. Justifier qu'on a $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$ et $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$.

6. En déduire la valeur de $\tan(2\alpha+\beta)$.

7. Conclure soigneusement.

Exercice 3. Une suite de polynômes très connue...

Pour tout entier naturel n on définit une fonction T_n sur $[-1,1]$ de la façon suivante :

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n\arccos(x)).$$

8. Pour $n \in \{0,1,2,3\}$ et $x \in [-1,1]$, donner une expression la plus simple possible de $T_n(x)$.

9. Résoudre, pour tout $n \geqslant 0$, l'équation $T_n(x) = 0$.

10. Montrer qu'on a, pour tout entier n : $\forall x \in [-1, 1],\ T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

11. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les fonctions T_n et T_{n+1} sont polynomiales.

On en déduit que T_n est dérivable et que sa dérivée T_n' est continue sur $[-1, 1]$ (T_n est une application polynomiale donc indéfiniment dérivable).

12. On souhaite maintenant calculer $T_n'(1)$.
    a. Justifier, brièvement mais proprement, qu'on a $\forall \theta \in [0, \pi],\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
    b. En déduire, pour $\theta \in]0, \pi[$, une expression de $T_n'(\cos(\theta))$, puis calculer $T_n'(1)$.

Micro-problème 4. Classement de joueurs de Go...

Quatre joueurs de Go notés A, B, C et D se sont affrontés les uns les autres un certain nombre de fois. Dans le tableau suivant, on synthétise le nombre de parties remportées par chaque joueur contre un autre : le nombre en ligne X colonne Y indique le nombre de parties que X a remporté contre Y. Ainsi, par exemple, le joueur B a remporté quatre parties contre le joueur C, alors que le joueur C a remporté une seule partie contre le joueur B.

Joueurs	A	B	C	D
A		1	2	1
B	0		4	1
C	2	1		1
D	2	1	0	

On appellera **bilan du joueur X contre le joueur Y** la différence entre le nombre de victoires de X sur Y et le nombre de victoires de Y sur X. Ainsi, le bilan de B contre C est 3 alors que le bilan de C contre B est -3.

Le but de ce micro-problème est de discuter de diverses méthodes permettant d'attribuer à chaque joueur une note strictement positive, de telle sorte que la note d'un joueur permette de quantifier raisonnablement son niveau par rapport aux autres joueurs.

13. On dira qu'un joueur X "est plus fort" qu'un joueur Y lorsque le nombre de victoires de X sur Y est supérieur [1] au nombre de victoires de Y sur X, c'est-à-dire lorsque le bilan de X contre Y est positif[1].
    a. La relation « être plus fort que » est-elle transitive ?
    b. Peut-on attribuer les notes de sorte qu'un joueur strictement plus fort qu'un autre ait toujours une note strictement supérieure ?

14. Résoudre le système $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ y - 4z = 1 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$ En déduire les solutions du système $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ y - 4z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 2x + y - z = -1. \end{cases}$

15. On propose une première méthode pour attribuer des notes aux joueurs : la note d'un joueur sera la somme de ses bilans contre les autres joueurs, augmentée d'une quantité k permettant à toutes les notes de rester strictement positives. Quelles sont les valeurs de k convenables ?

1. Au sens large évidemment, nous sommes en France.

La méthode précédente a un gros défaut : toutes les victoires rapportent autant de points. Cela n'est pas juste : une victoire contre un adversaire fort devrait rapporter davantage de points qu'une victoire contre un adversaire plus faible. On propose donc une seconde méthode pour attribuer des notes aux joueurs : la note de chaque joueur J sera $n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$, où n_1, n_2 et n_3 sont les notes des trois autres joueurs et où v_1, v_2 et v_3 sont les nombres de victoires remportées par J face aux trois joueurs correspondants.
Dans les questions 16 à 18, on note x, y, z, t des notes respectives de A, B, C, D obtenues à l'aide d'une telle méthode, s'il en existe. On rappelle que de telles notes doivent êtres strictement positives.

16. Expliciter les relations vérifiées par x, y, z, et t.

17. Justifier que s'il existe un quadruplet de telles notes (x, y, z, t), alors il existe un autre quadruplet de telles notes tel que $t = 1$.

18. En déduire qu'il n'existe pas de telles notes.

Essayons de sauver la méthode précédente : ce qui compte dans l'idée qu'on a présentée, c'est que la note de chaque joueur J soit (positivement) proportionnelle à $n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$, avec bien sûr un coefficient de proportionnalité identique pour chaque joueur. Dans les questions 19 à 20, on note $K > 0$ ce coefficient de proportionnalité, on note $\lambda = \frac{1}{K}$, et on note enfin x, y, z, t des notes respectives de A, B, C, D obtenues à l'aide d'une telle méthode. De même que dans les questions précédentes, on peut supposer avoir $t = 1$, ce que l'on fait donc dans la suite.

19. Expliciter les relations vérifiées par x, y, z, et λ.

20. Montrer qu'il existe bien un unique $K > 0$ et un unique triplet (x, y, z) de telles notes.

La méthode précédente a encore un défaut, qui est de tenir compte des victoires uniquement, mais pas des défaites.

21. Montrer qu'en remplaçant les victoires par les bilans dans la méthode précédente, alors il n'existe plus de coefficient $K > 0$ permettant d'obtenir des notes.