Devoir Surveillé $n°1$

Corrigé

Exercice 1. *Déjàfé*

1. On imagine que les flottants sont codés sur 16 bits, le premier bit étant le bit de signe, les 6 suivants les bits de l'exposant, ce qui reste étant destiné à la mantisse. Donner le codage de 0.42. Ce codage est-il fidèle ?

   • Le nombre est positif donc le bit de signe est 0.

   Pour trouver l'exposant on multiplie par 2 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 1 :
   $0.42 \times 2 = 0.84 < 1$.
   $0.84 \times 2 = 1.68 > 1$.
   Donc l'exposant est $-2 = \overline{111110}^2$.

   On détermine la mantisse :
   $0.68 \times 2 = \mathbf{1}.36$.
   $0.36 \times 2 = \mathbf{0}.72$.
   $0.72 \times 2 = \mathbf{1}.44$.
   $0.44 \times 2 = \mathbf{0}.88$.
   $0.88 \times 2 = \mathbf{1}.76$.
   $0.76 \times 2 = \mathbf{1}.52$.
   $0.52 \times 2 = \mathbf{1}.04$.
   $0.04 \times 2 = \mathbf{0}.08$.
   $0.08 \times 2 = \mathbf{0}.16$.
   Et on s'arrête car on a nos 9 bits (mais on a dû tronquer, on n'est pas arrivé à 1.00).

   Finalement, $\boxed{\text{le codage est }0111110101011100}$.

   Remarque : dans la norme IEE754 et contrairement à ce qu'on a écrit ici, l'exposant n'est pas exactement codé comme un entier naturel.

   • On a dû tronquer la mantisse, $\boxed{\text{ce codage n'est donc pas fidèle}}$ (un autre argument est que 0.42 a pour écriture fractionnaire irréductible $\frac{21}{50}$ qui n'est pas de la forme $\frac{M}{2^n}$).

2. Compléter $\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right)$ en une base orthonormée directe.

   Cf TACMAS sur $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Traduire ceci en formalisme symbolique.

   Cf TD sur la logique, corrigé en ligne.

Problème 2. *Encore (encore !) une équation fonctionnelle*

Dans ce problème on s'intéresse aux solutions **à valeurs réelles et dérivables sur** $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} \qquad (\star).$$

Partie I : Quelques solutions particulières de $(\star)$.

1. Déterminer toutes les solutions constantes de $(\star)$.

   Une application constante $f = x \mapsto c$ est solution si et seulement si on a $c = \dfrac{2c}{1+c^2}$ *i. e.* $c + c^3 = 2c$ *i. e.* $c^3 - c = 0$ *i. e.* $c \in \{-1, 0, 1\}$ après factorisation.

2. Montrer que th est une solution particulière de $(\star)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{2\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} = \dfrac{2\,\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}}{1+\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)^2} = \dfrac{\frac{2\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{2x}+1}}{\frac{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2+\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}} = \dfrac{2\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2+\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2}$ c'est-à-dire $\dfrac{2\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} = \dfrac{2\left(\mathrm{e}^{4x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{2x}+1\right)+\left(\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{2}+1\right)} = \dfrac{2\left(\mathrm{e}^{4x}-1\right)}{2\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)} = \mathrm{th}(2x)$. D'où le résultat demandé.

Partie II : Application réciproque de th.

3. *Un calcul d'intégrale.*

   a. Décomposer $\dfrac{1}{1-X^2}$ en éléments simples.

   La forme théorique de la décomposition est $\dfrac{1}{1-X^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$.

   - En multipliant cette égalité par $(X-1)$ puis en évaluant en $X=1$ on obtient $\boxed{a = \frac{-1}{2}}$.
   - En multipliant cette égalité par $(X+1)$ puis en évaluant en $X=-1$ on obtient $\boxed{b = \frac{+1}{2}}$.

   b. En déduire une expression simple de $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   On pourra utiliser la formule $\forall a, b > 0,\ \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ *pour simplifier l'expression obtenue.*

   - Si $|x| \geqslant 1$ le dénominateur s'annule sur $[0,x]$ et donc $\boxed{\text{l'intégrale n'est pas définie}}$.
   - Supposons $x \in]-1,1[$.

   Par linéarité on a $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\int_0^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t + \frac{-1}{2}\int_0^x \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^x + \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_0^x$.
   On notera la primitive en $t \mapsto \ln(1-t)$ et non pas $t \mapsto \ln(t-1)$ qui n'aurait pas de sens sur $[0,x]$.

   Finalement on a $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\Big)\boxed{= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en utilisant le rappel donné en indication.

4. *Bijectivité et réciproque de la fonction* th.

   a. Donner les variations et les limites de la fonction th.

   La fonction th est clairement impaire au vu de la première formule qui la définit.

   De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de sommes de fonctions dérivables et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} > 0$; comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème sur le signe de la dérivée .

   Enifn, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2-1}{X^2+1} = 1$ via le changement de variable $X = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$. Par imparité on a donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$.

b. En déduire que la fonction th définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Vérifier précisément les hypothèses des théorèmes utilisés.
Résumons. On a :
- th continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$) ;
- th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$;

ainsi, d'après le théorème de la bijection sur un ouvert, $\boxed{\text{th est bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } J =]-1,1[}$.

On note comme d'habitude th^{-1} la fonction réciproque de th.

c. Montrer que th^{-1} est dérivable sur J et calculer $\left(\operatorname{th}^{-1}\right)'$.
Indication : on pourra calculer $\operatorname{th}' + \operatorname{th}^2$.
Le calcul direct (ou le cours sur les fonctions usuelles, mais celui-ci n'était as exifgible pour ce DS) donne $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$. On a donc :
- th bijective de $\mathbb{R}$ dans J ;
- th dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{ch^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

donc d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques , th' est dérivable sur J de dérivée $\boxed{\left(\operatorname{th}^{-1}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{th}' \circ \operatorname{th}^{-1}} = x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}}$ en utilisant $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.

d. Expliciter th^{-1}.

Deux méthodes :

- On copie-colle la démonstration vue en TD pour sh^{-1}.

- On utilise les questions précédentes : $\left(\operatorname{th}^{-1}\right)' = x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ et $\operatorname{th}^{-1}(0) = 0$ (car $\operatorname{th}(0) = 0$), et $]-1,1[$ est un intervalle ; donc th^{-1} est l'unique primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ qui s'annule en 0. C'est donc $\boxed{x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.

Partie III : Solutions non constantes de ($\star$).

Dans cette partie, on considère une éventuelle solution dérivable f **non constante** de l'équation ($\star$).

5. Montrer qu'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
Indication : en utilisant ($\star$), *on pourra exprimer* $1 - f(x)$ *et* $1 + f(x)$ *en fonction de* $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Notons d'abord que pour x réel, on a
$f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)} = \dfrac{1+2f(x)+f^2(x)}{1+f^2(x)} - \dfrac{1+f^2(x)}{1+f^2(x)} = \dfrac{\left(1+f(x)\right)^2}{1+f^2(x)} - 1.$
Or on a $\dfrac{\left(1+f(x)\right)^2}{1+f^2(x)} \geqslant 0$ donc $f(2x) \geqslant -1$.
On a aussi $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)} = \dfrac{-1+2f(x)-f^2(x)}{1+f^2(x)} + \dfrac{1+f^2(x)}{1+f^2(x)} = -\dfrac{\left(1-f(x)\right)^2}{1+f^2(x)} + 1.$
Or on a $\dfrac{\left(1-f(x)\right)^2}{1+f^2(x)} \geqslant 0$ donc $f(2x) \leqslant 1$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(2x) \leqslant 1$.

Enfin soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right)$ et $-1 \leqslant f\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) \leqslant 1$ par ce qui précède. Donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1}$.

6. *Valeur de* $f(0)$.

   a. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.

   f constante signifie $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = f(0)$.

   Par conséquent f non constante signifie $\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) \neq f(0)}$.

Pour tout entier n, on note $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en 0, donc continue en 0.

   On a $\frac{x_0}{2^n} \to 0$ donc par continuité de f en 0, on déduit $\boxed{u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \to f(0)}$.

   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_{n+1}. *Oui, dans ce sens !*

   En déduire que $(u_n)_n$ est soit strictement positive, soit strictement négative, soit identiquement nulle.

   Pour tout entier n, on a $\boxed{u_n = f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}}$.

   Comme pour tout n, on a $1 + u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} et u_n ont toujours le même signe donc, par réccurrence immédiate, pour tout entier n, u_n a le signe de u_0 (avec $u_n = 0$ si et seulement si $u_0 = 0$).

   d. En déduire la monotonie de $(u_n)_n$.

   Pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2) - 1}{1 + u_{n+1}^2}$.

   Puisqu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) \leqslant 1$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$ et que $(u_{n+1} - u_n)u_{n+1} \leqslant 0$. Ainsi $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est décroissante et si } u_0 \leqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est croissante}}$ (elle constante, et donc identiquement nulle, si et seulement si $u_0 = 0$).

   e. Déduire des questions précédentes qu'on a nécessairement $f(0) \notin \{\pm 1\}$.

   • Raisonnons par l'absurde pour montrer $f(0) \neq 1$. Supposons $f(0) = 1$. Alors, comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 appartient à $[-1, 1[$.

   Distinguons deux cas :

   i. Si u_0 est négatif, alors tous les termes de la suite u sont négatifs et la suite u ne peut converger vers 1. Contradiction.

   ii. Si u_0 appartient à $[0, 1[$, la suite u est décroissante et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ ce qui conduit à $1 < 1$. Contradiction.

   On a donc bien montré, par l'absurde, qu'on a $\boxed{f(0) \neq 1}$.

   • Raisonnons par l'absurde pour montrer $f(0) \neq -1$. Supposons $f(0) = -1$. Posons alors $g = -f$. On vérifie sans peine que g est une solution du problème posé qui vérifie $g(0) = 1$ ce qui est impossible d'après le point précédent (bien sûr, on peut aussi refaire l'étude dans ce cas, elle est analogue).
   On a donc bien montré, par l'absurde, qu'on a $\boxed{f(0) \neq -1}$.

7. Déduire des questions précédentes qu'on a :
$$f(0) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$$

- On a vu qu'on avait $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$ et $f(0) \notin \{-1, 1\}$. Bon, bin, on n'a plus trop le choix, $\boxed{f(0) = 0}$.
- Admettons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Alors :
$$1 = f(x_0) = f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{1 + f^2\left(\frac{x_0}{2}\right)}, \text{ d'où } 1 + f^2\left(\frac{x_0}{2}\right) = 2f\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

  donc $\left(1 - f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right)^2 = 0$ et donc $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 1$.

  Par une récurrence immédiate, on établit : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$. En passant à la limite on a donc $f(0) = 1$ c'est-à-dire $0 = 1$, ça se saurait. On a donc montré par l'absurde qu'$\boxed{\text{il n'existe pas de } x_0 \text{ tel que } f(x_0) = 1}$.
  Mais comme on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 1$, $\boxed{\text{on déduit } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 1}$.

  $\boxed{\text{On établit l'autre inégalité de façon analogue.}}$ À la limite à ce stade de la copie on peut même balancer cette phrase mot pour mot au correcteur, maintenant il sait à qui il a à faire (qu'il se soit fait une opinion positive ou pas).

8. Dans cette question on définit une fonction g par
$$g(x) = \text{th}^{-1}(f(x)).$$

   a. Justifier que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   L'application f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1, 1[$ (elle est non constante) donc $\text{th}^{-1}(f(x))$ a un sens pour tout réel x. $g = th^{-1} \circ f$ est alors la composée de deux fonctions dérivables, elle est donc dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$.

   b. Montrer qu'on a $\forall t \in \mathbb{R},\ g(2t) = 2g(t)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\text{th}\big(g(2x)\big) = \text{th}\Big(\text{th}^{-1}\big(f(2x)\big)\Big) = f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + f^2(x)} = \dfrac{2\text{th}\big(g(x)\big)}{1 + \text{th}^2\big(g(x)\big)} = \text{th}\big(2g(x)\big)$, comme on l'a vu dans la question 2.

   Par injectivité de th (elle est strictement croissante), ou en composant à gauche par th^{-1}, on en déduit : $\boxed{g(2x) = 2g(x)}$.

   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.

   c. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.
   Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

   On a : $g(0) = \text{th}^{-1}(f(0)) = 0$ donc v_n est le taux d'accroissement de g en 0 évalué en $\frac{x}{2^n}$.

   Or on a $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim(v_n) = g'(0)}$ (car g dérivable en 0).

   d. En déduire que g est linéaire.

   Montrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$, en notant $\mathcal{P}_n$ l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, xv_n = 2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$. <u>Initialisation</u> : Ok.

   <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x_v n + 1 = 2^n \times 2g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^n g\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right)$

(cf question 8.b.).

La propriété est donc bien héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On vient de voir qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x) = xv_n$, d'où, en passant à la limite en n, $g(x) = xg'(0) = \lambda x$ avec $\lambda = g'(0)$. Et donc $\boxed{g \text{ est linéaire}}$.

Partie IV : Conclusion.

9. Résoudre $(\star)$.

D'après la partie III, les solutions non constantes de $(\star)$ sont de la forme $t \mapsto \text{th}(\alpha t)$. En réinjectant on obtient qu'un tel candidat est toujours solution. À ces solutions il ne faut pas oublier d'ajouter les solutions constantes, bien que la fonction nulle soit déjà dans la liste, car on l'obtient pour $\alpha = 0$.

Conclusion : les solutions de $(\star)$ forment l'ensemble $\boxed{S = \{t \mapsto 1\} \cup \{t \mapsto -1\} \cup \{t \mapsto \text{th}(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$.

Problème 3. *Formule d'inversion de Pascal*

Dans ce problème on note $\binom{p}{k}$ les coefficients binomiaux. La première partie du problème a pour objectif de démontrer la *formule d'inversion de Pascal* : si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels tels que $\forall p \in \{1, \ldots, n\}, a_p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_k$ alors on a $\forall p \in \{1, \ldots, n\}, b_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k$.

La seconde partie, qui peut se traiter indépendamment, utilise cette formule pour dénombrer des surjections.

Enfin, la dernière partie, qui peut se traiter indépendamment, utilise la formule pour dénombrer des dérangements.

Dans tout le problème on note, pour tout entier naturel k, $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Partie I : démonstration de la formule d'inversion.

1. Montrer qu'on a, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, $\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$.

On pourra utilser la formule du binôme de Newton.

Fait en TD. On se rappellera que pour $\ell = 0$, par contre, on trouve 1 et non pas 0.

2. *Un lemme*

a. Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $k \leqslant q \leqslant p$, on a $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.

Soient k, q et p entiers tels que $k \leqslant q \leqslant p$.

On a $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \frac{p!}{q!(p-q)!}\frac{q!}{k!(q-k)!} = \frac{p!}{(p-q)!k!(q-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{(p-q)!(q-k)!}$,

donc $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{((p-k)-(q-k))!(q-k)!} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.

b. En déduire que, pour tout entier p et tout entier $k < p$, on a $\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$.

Soit p entier et $k < p$.

Par la question précédente, on a, pour tout entier q tel que $k \leqslant q \leqslant p$, $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k} = \binom{p}{k}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p-k}{q-k}$ et donc, par changement d'indice (le nouveau q correspond à l'ancien $q-k$), on obtient :

$$\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\sum_{q=0}^{p-k}(-1)^{q+k}\binom{p-k}{q} = (-1)^k\binom{p}{k}\sum_{q=0}^{p-k}(-1)^q\binom{p-k}{q} = (-1)^k\binom{p}{k}\times 0 = 0.$$

c. Que vaut $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k}$ pour $k=p$?

Pour $k=p$, on a $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=p}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = (-1)^p\binom{p}{p}\binom{p}{p} = (-1)^p$.

3. *Démonstration de la formule d'inversion*

a. Justifier qu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i$.

Soit $p \in \{1,\dots,n\}$.

On sait par l'énoncé qu'on a, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, $a_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}b_i$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}b_i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i.$$

b. Ici $f(i,k)$ est une expression pouvant comporter les variables i et k.

Renseignez les « ? » (aucune justification n'est demandée) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}f(i,k) = \sum_{i=?}^{?}\sum_{k=?}^{?}f(i,k)$.

On a : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}f(i,k) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=i}^{p}f(i,k)}$. Pour comprendre : écrire la somme avec des $\cdots$!

c. Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Pour $p \in \{1,\dots,n\}$, on a, par ce qui précède, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=i}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i$, donc

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{i=1}^{p}(-1)^p b_i\sum_{k=i}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{i}.$$

Or, par la question b., on a $\displaystyle\sum_{k=i}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{i} = 0$ pour $k \in \{i,\dots,p-1\}$ et, par la question c., on a $\displaystyle\sum_{k=i}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{i} = (-1)^p$ pour $k=p$.

On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = (-1)^p b_p(-1)^p = b_p$.

Ceci étant démontré pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$, on a bien établi la formule d'inversion de Pascal.

Partie II : compter les injections, compter les surjections.

Dans cette partie, p et n désignent deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

4. Dans cette question on souhaite dénombrer les injections de E_p dans E_n. On note $I_{n,p}$ l'ensemble de toutes ces injections, on cherche donc $\mathrm{card}\big(I_{n,p}\big)$. On note $\mathcal{P}_p(E_n)$ l'ensemble des parties à p éléments de E_n.

   a. Si f est une injection de E_p dans E_n, on note $\Phi(f)$ l'ensemble des éléments de E_n ayant exactement un antécédent par f. Justifier qu'on a alors $\Phi(f) \in \mathcal{P}_p(E)$.

   Par injectivité de f, les éléments de E_n ont 0 ou 1 antécédent par f. Les éléments de E_n ayant 1 antécédent par f sont les images par f, et par injectivité les p éléments de E_p ont des images distinctes. Il y a donc exactement p éléments de E_n ayant 1 antécédent par f, autrement dit on a $\big|\Phi(f)\big| = p$, c'est-à-dire $\Phi(f) \in \mathcal{P}_p(E_n)$.

   b. Justifier que $\Phi : I_{n,p} \to \mathcal{P}_p(E)$ est bijective.

   • L'application Φ est bien définie d'après la question précédente.

   • Elle est surjective car étant donnée une partie $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \in \mathcal{P}_p(E_n)$ (a_i tous distincts), l'application $f = i \mapsto a_i$ est clairement un antécédent de P.

   • Par contre, $\boxed{\text{elle n'est pas injective}}$, c'est une coquille de l'énoncé. Plus précisément, étant donnée une partie $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \in \mathcal{P}_p(E_n)$, cette partie $\boxed{\text{a toujours } p! \text{ antécédents par } \Phi}$, obtenus en précomposant $i \mapsto a_i$ par une permutation de E_p.

   c. En déduire le nombre d'injections de E_p dans E_n.

   Si Φ était bijective, on aurait par égalité des cardinaux $\binom{n}{p}$ injections. Mais comme elle n'est pas injective et que plus précidément à chaque image correspond toujours $p!$ antécédents, on a en fait $\boxed{p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ injections}}$.

Dans les deux questions suivantes, on utilise la formule d'inversion de Pascal pour dénombrer les surjections de E_n dans E_p. Pour tout entier k, on note $s_{n,k}$ le nombre de surjections de E_n dans E_k.

5. a. Combien y a-t-il d'applications de E_n dans E_p ? On attend une démonstration.

   Il y en a p^n et la démonstration est dans le cours.

   b. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$. Combien y a-t-il d'applications de E_n dans E_p pour lesquelles exactement k éléments de E_p ont un antécédent ?

   On a $\binom{p}{k}$ façons de choisir ces k éléments.
   Une fois ces k éléments choisis, et quitte à les renommer 1, 2, …, k, il reste à se donner une surjection de E_n dans E_k et cela on a $s_{n,k}$ façons de le faire, en utilisant les notations de l'énoncé.

   $\boxed{\text{Total : } \binom{p}{k} s_{n,k}}$ applications de E_n dans E_p pour lesquelles k éléments de E_p ont un antécédent.

   c. En déduire qu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k} s_{n,k} = p^n$.

   Encore une coquille ! ! Il faut lire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s_{n,k} = p^n$.

   Une application f de E_n dans E_k est nécessairement de l'une des p formes suivantes, à l'exclusion de toute autre, ces formes s'excluant mutuellement :

   • ou bien exactement 1 élément de E_p a un antécédent (f est constante) : on en a $\binom{p}{1} s_{n,1}$;

- ou bien exactement 2 éléments de E_p ont un antécédent : on a $\binom{p}{2}s_{n,2}$ telles applications ;
- ou bien exactement 3 éléments de E_p ont un antécédent : on a $\binom{p}{3}s_{n,3}$ telles applications ;
- $\vdots$
- ou bien tous les p éléments de E_p ont un antécédent : on a $\binom{p}{p}s_{n,p}$ telles applications ;

Total : on a en tout $\sum\limits_{k=1}^{p}\binom{p}{k}s_{n,k}$ applications de E_n dans E_p. Mais on a vu à la question 5.a. qu'on en avait p^n. D'où l'égalité demandée, enfin, une fois qu'on l'a corrigée ☹.

6. En déduire qu'on a $s_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

On applique la formule d'inversion avec $a_k = k^n$ et $b_k = s_{n,k}$.

7. Écrire une fonction Python prenant comme arguments deux entiers `n` et `p` et retournant comme résultat $s_{n,p}$.

Parmi les très nombreuses façons de faire, en voici une :

• Il convient tout d'abord de définir les coefficients binomiaux. Une façon rigolote quoique peu efficace pour le faire :

```
def binomial(n,k):
    if k>n or k<0:
        return(0)
    elif k==0:
        return(1)
    else:
        return(binomial(n-1,k)+binomial(n-1,k-1))
```

• On peut maintenant définir notre fonction. Ici une version très (trop ?) synthétique :

```
def surjections(n,p):
    return(sum([(-1)**(p-k)*binomial(p,k)*k**n for k in range(1,p+1)]))
```

Partie III : compter les dérangements.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel. On rappelle qu'une **permutation** est une bijection de E_n dans E_n. Étant donné une permutation σ et un entier $k \in E_n$, on dit que k est un **point fixe** de σ lorsqu'on a $\sigma(k) = k$. Enfin, on appelle **dérangement** une permutation sans point fixe. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note d_k le nombre de bijections de E_k dans E_k sans points fixes, on cherche donc d_n.

8. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier que le nombre de permutations ayant exactement k points fixes est $\displaystyle\binom{n}{n-k}d_{n-k}$.

• On doit choisir ces k points fixes : $\binom{n}{k}$ choix.

• Une fois les k points fixes choisis, f est entièrement déterminée sur ces k éléments, et doit n'avoir aucun point fixe sur les $n-k$ autre, c'est-à-dire que f restreinte à l'ensemble des $n-k$ éléments restants est un dérangement de ces $n-k$ éléments : on a donc d_{n-k} fonctions f possibles.

Total : on a en tout $\binom{n}{k}d_{n-k}$ permutations ayant k points fixes, ce qui est égal à $\displaystyle\binom{n}{n-k}d_{n-k}$ d'après la formule de symétrie.

9. En déduire qu'on a $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

   Une permutation peut avoir 0, ou 1, ou 2, ou $\cdots$, ou n points fixes. Il y a donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_{n-k}$ permutations, *i. e.* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ permutations après changement d'indice (le nouveau k est l'ancien $n-k$). Mais d'après le cours, il y a $n!$ permutations. D'où l'égalité.

10. En déduire que le nombre de dérangements est $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

    Il faut commencer par établir une variante de la formule d'inversion : si si α_0, α_1, ..., α_n, β_0, β_1, ..., β_n sont des réels tels que $\forall p \in \{0, \ldots, n\}, \alpha_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \beta_k$ alors on a $\forall p \in \{0, \ldots, n\}, \beta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \alpha_k$.
    Cette formule s'obtient en appliquant la formule d'inversion non pas pour l'entier n mais pour l'entier $n+1$, avec $a_1 = \alpha_0$, ..., $a_{n+1} = \alpha_n$, $b_1 = \beta_0$, ..., $b_n = \beta_{n+1}$.

    Ensuite : on applique cette variante de la formule d'inversion à $\alpha_k = k!$, $\beta_k = d_k$, $p = n$.
    On trouve $d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(p-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}$.

    Puis un changement d'indice (le nouveau k est l'ancien $n-k$) donne le résultat demandé.