Devoir Surveillé $n°1$

Samedi 11 octobre 2012

Durée : 4h00

Ce sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants. Ne pas faire l'exercice serait très mal vu : il est là pour donner des points. Le sujet comporte 4 pages. Il est trop long donc *repérez attentivement les questions que vous pouvez traiter* (il y en a, même dans le problème 3). **Les calculatrices sont autorisées.**

On tiendra fondamentalement compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1. *Déjàfé*

1. On imagine que les flottants sont codés sur 16 bits, le premier bit étant le bit de signe, les 6 suivants les bits de l'exposant, ce qui reste étant destiné à la mantisse. Donner le codage de 0.42. Ce codage est-il fidèle ?
2. Compléter $\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right)$ en une base orthonormée directe.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Traduire ceci en formalisme symbolique.

Problème 2. *Encore (encore !) une équation fonctionnelle*

Dans ce problème on s'intéresse aux solutions **à valeurs réelles et dérivables sur** $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} \qquad (\star).$$

Partie I : Quelques solutions particulières de $(\star)$.

Dans toute la suite (comme dans la vraie vie d'ailleurs), on notera th l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ (on ne demande pas de justifier que ces deux expressions sont égales, ni qu'elles ont toujours un sens pour $x \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer toutes les solutions constantes de $(\star)$.
2. Montrer que th est une solution particulière de $(\star)$.

Partie II : Application réciproque de th.

3. *Un calcul d'intégrale.*
   a. Décomposer $\dfrac{1}{1-X^2}$ en éléments simples.
   b. En déduire une expression simple de $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   On pourra utiliser la formule $\forall a,b>0,\ \ln(a)-\ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ pour simplifier l'expression obtenue.

4. *Bijectivité et réciproque de la fonction* th.
   a. Donner les variations et les limites de la fonction th.
   b. En déduire que la fonction th définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   Vérifier précisément les hypothèses des théorèmes utilisés.

   On note comme d'habitude th^{-1} la fonction réciproque de th.

   c. Montrer que th^{-1} est dérivable sur J et calculer $\left(\text{th}^{-1}\right)'$.
   d. Expliciter th^{-1}.

Partie III : Solutions non constantes de $(\star)$.

Dans cette partie, on considère une éventuelle solution dérivable f **non constante** de l'équation $(\star)$.

5. Montrer qu'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   Indication : en utilisant $(\star)$, *on pourra exprimer* $1 - f(x)$ *et* $1 + f(x)$ *en fonction de* $f\left(\frac{x}{2}\right)$.
6. *Valeur de* $f(0)$.
   a. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.

   Pour tout entier n, on note $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_{n+1}. *Oui, dans ce sens !*
   En déduire que $(u_n)_n$ est soit strictement positive, soit strictement négative, soit identiquement nulle.
   d. En déduire la monotonie de $(u_n)_n$.
   e. Déduire des questions précédentes qu'on a nécessairement $f(0) \notin \{\pm 1\}$.
7. Déduire des questions précédentes qu'on a :
$$f(0) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$$
8. Dans cette question on définit une fonction g par
$$g(x) = \text{th}^{-1}(f(x)).$$
   a. Justifier que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer qu'on a $\forall t \in \mathbb{R},\ g(2t) = 2g(t)$.
   c. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.
   Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
   d. En déduire que g est linéaire.

Partie IV : Conclusion.

9. Résoudre $(\star)$.

Problème 3. *Formule d'inversion de Pascal*

Dans ce problème on note $\binom{p}{k}$ les coefficients binomiaux. La première partie du problème a pour objectif de démontrer la *formule d'inversion de Pascal* : si a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n sont des réels tels que $\forall p \in \{1, \ldots, n\}, a_p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_k$ alors on a $\forall p \in \{1, , \ldots, n\}, b_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k$.
La seconde partie, qui peut se traiter indépendamment, utilise cette formule pour dénombrer des surjections.
Enfin, la dernière partie, qui peut se traiter indépendamment, utilise la formule pour dénombrer des dérangements.
Dans tout le problème on note, pour tout entier naturel k, $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Partie I : démonstration de la formule d'inversion.

1. Montrer qu'on a, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, $\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$.
   On pourra utilser la formule du binôme de Newton.

2. *Un lemme*
   a. Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $k \leqslant q \leqslant p$, on a $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.
   b. En déduire que, pour tout entier p et tout entier $k < p$, on a $\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$.
   c. Que vaut $\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k}$ pour $k = p$?

3. *Démonstration de la formule d'inversion*
   a. Justifier qu'on a $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i$.
   b. Ici $f(i, k)$ est une expression pouvant comporter les variables i et k.
   Renseignez les « ? » (aucune justification n'est demandée) : $\sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{k} f(i, k) = \sum_{i=?}^{?} \sum_{k=?}^{?} f(i, k)$.
   c. Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Partie II : compter les injections, compter les surjections.

Dans cette partie, p et n désignent deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

4. Dans cette question on souhaite dénombrer les injections de E_p dans E_n. On note $I_{n,p}$ l'ensemble de toutes ces injections, on cherche donc $\text{card}(I_{n,p})$. On note $\mathcal{P}_p(E_n)$ l'ensemble des parties à p éléments de E_n.
   a. Si f est une injection de E_p dans E_n, on note $\Phi(f)$ l'ensemble des éléments de E_n ayant exactement un antécédent par f. Justifier qu'on a alors $\Phi(f) \in \mathcal{P}_p(E_n)$.
   b. Justifier que $\Phi : I_{n,p} \to \mathcal{P}_p(E)$ est bijective.
   Attention, coquille de l'énoncé, j'aurais dû écrire **surjective** !
   c. En déduire le nombre d'injections de E_p dans E_n.

Dans les deux questions suivantes, on utilise la formule d'inversion de Pascal pour dénombrer les surjections de E_n dans E_p. Pour tout entier k, on note $s_{n,k}$ le nombre de surjections de E_n dans E_k.

5. a. Combien y a-t-il d'applications de E_n dans E_p ? On attend une démonstration.
   b. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$. Combien y a-t-il d'applications de E_n dans E_p pour lesquelles exactement k éléments de E_p ont un antécédent ?
   c. En déduire qu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k} s_{n,k} = p^n$.
   Autre coquille, j'aurais dû écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s_{n,k} = p^n$.
6. En déduire qu'on a $s_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.
7. Écrire une fonction Python prenant comme arguments deux entiers `n` et `p` et retournant comme résultat $s_{n,p}$.

Partie III : compter les dérangements.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel. On rappelle qu'une **permutation** est une bijection de E_n dans E_n. Étant donné une permutation σ et un entier $k \in E_n$, on dit que k est un **point fixe** de σ lorsqu'on a $\sigma(k) = k$. Enfin, on appelle **dérangement** une permutation sans point fixe. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note d_k le nombre de bijections de E_k dans E_k sans points fixes, on cherche donc d_n.

8. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier que le nombre de permutations ayant exactement k points fixes est $\displaystyle\binom{n}{n-k} d_{n-k}$.
9. En déduire qu'on a $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
10. En déduire que le nombre de dérangements est $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.