DC $n°$ 03

Vendredi 22/12/2017

Corrigé.

Exercices 1 à 3.

Cf banque CCP.

Exercice 4. Suites

1. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge et on note ℓ sa limite.

   a. Justifier qu'on a $\ell \in \mathbb{R}_+$.

   On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}_+$ qui est fermé, donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   On peut bien sûr dire la même chose sans le mot "fermé", avec "les inégalités larges passent à la limite".

   b. Montrer que, si on a $\ell < 1$, alors u_n converge vers 0.

   • On a alors $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Par définition de la limite il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$. En particulier $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$.

   • Notons $q = \frac{\ell+1}{2}$. On remarque qu'on a $0 \leqslant q < 1$.
   Soit $n \geqslant n_0 + 2$. On a alors $0 \leqslant u_n < qu_{n-1} < q^2 u_{n-2} < \cdots < q^{n-n_0} u_{n_0} = \lambda q^n$ en posant $\lambda = \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.
   La suite géométrique $(\lambda q^n)_n$ converge vers 0 car sa raison est < 1 donc par TdG $u_n \to 0$.

   c. Montrer que, si on a $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.

   • On a alors $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Par définition de la limite il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$. En particulier $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{\ell+1}{2} = \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   • Notons $q = \frac{\ell+1}{2}$. On remarque qu'on a $q > 1$.
   Soit $n \geqslant n_0 + 2$. On a alors $u_n > qu_{n-1} > q^2 u_{n-2} > \cdots > q^{n-n_0} u_{n_0} = \lambda q^n$ en posant $\lambda = \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.
   La suite géométrique $(\lambda q^n)_n$ tend vers $+\infty$ car sa raison est > 1 donc par TdG $u_n \to +\infty$.

2. On note $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si elle existe.

   Une façon de faire, pas la seule, est d'utiliser la question précédente : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \mathrm{e} > 1$ donc $u_n \to +\infty$.

Exercice 5. Intégration (durée conseillée : $\sim$ 45 minutes)

1. Calculer les primitives sur $]0,1[$ de $x \mapsto \dfrac{2x^2}{1-x^4}$.

   Après DES : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \arctan(x) + \mathbb{R}$ (car on est sur $]0,1[$).

2. Calculer les primitives sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \sqrt{\mathrm{th}(t)}$.
   *On suggère **vivement** le changement de variables $x = \sqrt{\mathrm{th}(t)}$.*

   L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,1[\\ t & \mapsto & \sqrt{\mathrm{th}(t)} \end{array} \right.$ est bien définie, bijective, $\mathcal{C}^1$, de réciproque $\mathcal{C}^1$. Après calcul :

$$\int \sqrt{\mathrm{th}(t)}\ \mathrm{d}t = \int \frac{2x^2}{1-x^4}\ \mathrm{d}x$$

Et en substituant à x son expression :

$$\int \sqrt{\operatorname{th}(t)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{\operatorname{th}(t)}) - \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{\operatorname{th}(t)}) - \arctan(\sqrt{\operatorname{th}(t)}) + \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Une suite récurrente dans $\mathbb{C}$

Dans cet exercice, on considère une suite à valeurs complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixé} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|) \end{cases}$$

1. *Question préliminaire :*

   On considère un réel $\theta \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$. Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

   Déjà fait ! Via $\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2\sin(a)}$ (ok pour $a \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$), on voit que le poduit est télescopique.
   On trouve alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

2. *Le cas $z_0 \in \mathbb{R}$.*

   (a) Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 = 0$?

   (b) Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 \in \mathbb{R}_+^\times$?

   (c) Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 \in \mathbb{R}_-^\times$?

   (a) Elle est constante ; (b) Elle est constante aussi ; (c) Elle stationne sur 0 à partir du rang 1.

3. *Le cas $z_0 \notin \mathbb{R}$:* On suppose dans cette question $z_0 \notin \mathbb{R}$.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \notin \mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons a_n et b_n les parties rélle et imaginaire de z_n. On a $b_0 \neq 0$ par hypothèse. On a aussi, pour tout n, $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{b_n}{2} = a_{n+1} + \mathrm{i}b_{n+1}$ donc $(b_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{b_0}{2^n} \neq 0$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note ρ_n le module de z_n et θ_n l'argument principal de z_n.
   Exprimer alors ρ_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de ρ_n et θ_n.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons ρ_n et θ_n les module et argument principal de z_n. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{\rho_n e^{\mathrm{i}\theta_n} + \rho_n}{2} = \rho_n \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta_n} + 1}{2} = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\rho_n e^{\mathrm{i}\frac{\theta_n}{2}}$ en arcmoitiant.
   Comme $\theta_n \in]-\pi,\pi[$, on a donc $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\rho_n > 0$ et $\frac{\theta_n}{2} \in]-\pi,\pi[$, donc $\rho_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\rho_n$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

   (c) En déduire les expressions de ρ_n et de θ_n en fonction de n.

   $(\theta_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$.
   En réinjectant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right)\rho_0 = \dfrac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}\rho_0$ d'après la question préliminaire.

   (d) Finalement, montrer que z_n converge et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n$.

   Déjà $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \to 0$ ça c'est fait.

Ensuite, les DL étant nos amis et puisqu'on a $\frac{\theta_0}{2^n} \to 0$, on peut écrire $\dfrac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} = \dfrac{\sin(\theta_0)}{2^n \left(\frac{\theta_0}{2^n} + \frac{\theta_0}{2^n}\varepsilon_n\right)}$ pour une certaine suite $(\varepsilon_n)_n$ de limite nulle. Il s'ensuit qu'on a $\rho_n = \dfrac{\sin(\theta_0)}{\theta_0 + \theta_0\varepsilon_n}\rho_0 \to \dfrac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}\rho_0$.

On résume : on a $\theta_n \to 0$ et $\rho_n \to \dfrac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}\rho_0$ donc d'après le cours $z_n = \rho_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} \to \dfrac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}\rho_0$.