DC n° **03**

Vendredi 22/12/2017

Durée 3h.

Tout matériel électronique interdit.

Exercice 1. CCP (durée conseillée : $\sim$ 20 minutes)

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 2. CCP (durée conseillée : $\sim$ 20 minutes)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 3. CCP (durée conseillée : $\sim$ 20 minutes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4. Suites (durée conseillée : $\sim$ 30 minutes)

1. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge et on note ℓ sa limite.
   a. Justifier qu'on a $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   b. Montrer que, si on a $\ell < 1$, alors u_n converge vers 0.
   c. Montrer que, si on a $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.
2. On note $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$, si elle existe.

Exercice 5. Intégration (durée conseillée : $\sim$ 45 minutes)

1. Calculer les primitives sur $]0,1[$ de $x \mapsto \dfrac{2x^2}{1-x^4}$.

2. Calculer les primitives sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \sqrt{\operatorname{th}(t)}$.
   On suggère ***vivement*** *le changement de variables* $x = \sqrt{\operatorname{th}(t)}$.

Exercice 6. Une suite récurrente dans $\mathbb{C}$ (durée conseillée : $\sim$ 45 minutes)

Dans cet exercice, on considère une suite à valeurs complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixé} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|) \end{cases}$$

1. *Question préliminaire :*
   On considère un réel $\theta \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$. Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.
   Indication : il est télescopique.

2. *Le cas* $z_0 \in \mathbb{R}$.
   a. Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 = 0$?
   b. Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 \in \mathbb{R}_+^\times$?
   c. Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 \in \mathbb{R}_-^\times$?

3. *Le cas* $z_0 \notin \mathbb{R}$ *:* On suppose dans cette question $z_0 \notin \mathbb{R}$.
   a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \notin \mathbb{R}$.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note ρ_n le module de z_n et θ_n l'argument principal de z_n.
   Exprimer alors ρ_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de ρ_n et θ_n.
   c. En déduire les expressions de ρ_n et de θ_n en fonction de n.
   d. Finalement, montrer que z_n converge et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n$.