DC $n°$ 02

Corrigé

Exercice 1. Deux équations

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x-24}+\sqrt{x-9}=\sqrt{x}$ d'inconnue réelle x.

   La sagesse consiste à écrire une analyse-synthèse. On peut aussi faire les fous et tenter le coup des équivalences successives comme ci-dessous :

$$\sqrt{x-24}+\sqrt{x-9}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-24)+2\sqrt{x-24}\sqrt{x-9}+(x-9)=x\\ x\geqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2\sqrt{(x-24)(x-9)}=33-x\\ x\geqslant 0\\ x-9\geqslant 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4(x-24)(x-9)=(33-x)^2\\ x\geqslant 9\\ 33-x\geqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x^2-66x-225=0\\ x\geqslant 9\\ x\leqslant 33\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\in\{-3;25\}\\ x\geqslant 9\\ x\leqslant 33\end{array}\right. \Leftrightarrow x=25.$$

2. Résoudre l'équation $2\cos(x)^2+5\sin(x)=4$ d'inconnue réelle x.

   Appelons-là $(\star)$. L'équation $(\star)$ se réécrit $2-2\sin(x)^2+5\sin(x)=4$ avec le théorème de Pythagore, puis $2\sin(x)^2-5\sin(x)+2=0$. Ainsi, x est solution de $(\star)$ si et seulement si $\sin(x)$ est racine du polynôme $2X^2-5X+2$ dont le discriminant est $\Delta=9$ et les racines sont $\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}$ *i. e.* 2 et $\frac{1}{2}$. Finalement $(\star)$ équivaut à $\sin(x)=2$ ou $\sin(x)=\frac{1}{2}$. La première équation n'a pas de solution et la seconde a pour ensemble de solutions $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 2. Un système linéaire

On s'intéresse au système (S_λ) suivant : $\left\{\begin{array}{l}(1-\lambda)x+y-2z=0\\ -2x+(4-\lambda)y-4z=0\\ -x+y-\lambda z=0\end{array}\right.$.

1. Résoudre le système (S_2) obtenu pour $\lambda=2$.

   S_2 est le système $\left\{\begin{array}{l}-x+y-2z=0\\ -2x+2y-4z=0\\ -x+y-2z=0\end{array}\right.$. Les trois lignes sont clairement équivalentes à $x-y+2z=0$. Le système a donc une (grosse) infinité de solution, qu'on peut par exemple décrire $S=\left\{(y-2z,y,z),\ \binom{y}{z}\in\mathbb{R}^2\right\}$.

2. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\in\mathbb{R}$, quitte à faire apparaître plusieurs cas pour λ.

   On permute les première et troisième ligne : $\left\{\begin{array}{l}-x+y-\lambda z=0\\ -2x+(4-\lambda)y-4z=0\\ (1-\lambda)x+y-2z=0\end{array}\right.$.

   Ensuite Gauss échelonne le système en $\left\{\begin{array}{l}-x+y-\lambda z=0\\ (2-\lambda)y+(2\lambda-4)z=0\\ (\lambda^2-3\lambda+2)z=0\end{array}\right.$.

   On remarque qu'on a $\lambda^2-3\lambda+2=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{1,2\}$.

   Trois cas :

   - Si $\lambda\notin\{1,2\}$ la troisième ligne du système échelonné donne $z=0$, puis en cascade $y=0$, $x=0$: $S=\{(0,0,0)\}$.
   - Si $\lambda=1$ le système équivaut à $\left\{\begin{array}{l}y=2z\\ x=z\end{array}\right.$: $S=\{(z,2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

- On a déjà traité le cas $\lambda = 2$: les deux dernières lignes du système échelonné ne donnent aucune information. Le système équivaut à $-x+y-\lambda z = 0 \Leftrightarrow -x+y-2z = 0$ et on retrouve bien $S = \left\{(y-2z, y, z),\ \binom{y}{z} \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 3. Quelques irrationnalités

1. (a) Montrer l'énoncé suivant : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$.
   (b) Montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

   Oui bon n'abusons pas tout de même, c'est dans le cours.

2. (a) Montrer l'énoncé suivant : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$.
   On pourra utiliser sans démonstration la propriété $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$.

   Soit $x > 0$. On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$. Montrons-le par récurrence.

   Initialisation : Pour $n = 0$ on a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0\ln(x)$. La propriété est bien initialisée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\ln(x^n) = n\ln(x)$ (hypothèse de récurrence).
   On a alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)$ d'après la propriété rappelée, et donc $\ln(x^{n+1}) = n\ln(x) + \ln(x)$ par hypothèse de récurrence. Donc finalement $\ln(x^{n+1}) = (n+1)\ln(x)$.

   La propriété est donc bien héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que le réel $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

   On raisonne bien sûr par l'absurde. Supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ soit rationnel, il peut donc s'écrire $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{Z}$. Plus précisément, on doit avoir q non nul, et, comme $\ln(2)$ et $\ln(3)$ sont tous les deux strictement positifs, on peut supposer p et q positifs. On a alors

   $$q\ln(2) = p\ln(3)$$

   donc d'après (a), $\ln(2^q) = \ln(3^p)$, et finalement $2^q = 3^p$ "par injectivité de ln" (si on veut se la péter, sinon on compose simplement par exp). Or q est un entier strictement positif donc 2^q est un entier pair, tandis que 3^p est un entier impair, contradiction.
   On a bien montré, par l'absurde, $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Quelques équations fonctionnelles

1. Déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x+y)f(x-y) = xf(x) - yf(y) \quad (\star)$$

   Une façon de faire : Raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse : Considérons une fonction f convenable. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 0$, en particularisant dans $(\star)$ on obtient $f(x)^2 = xf(x)$, donc $f(x) \in \{0, x\}$. Ceci étant vrai pour tout x on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $f(x) = x$.

Attention, ceci est différent de $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\big)$ ou $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big)$. C'est là qu'on peut intelligemment exploiter l'hypothèse de continuité : comme id et $x \mapsto 0$ ne prennent les mêmes valeurs qu'en 0, f est nécessairement l'une des quatre fonctions id, $x \mapsto 0$, g ou d, où $g = x \mapsto \min(0, x)$ et $d = x \mapsto \max(0, x)$.

Synthèse : Testons nos candidats : id et $x \mapsto 0$ conviennent clairement. Par contre, g ne convient pas car pour $x = -1$ et $y = 1$ on a $g(x+y)g(x-y) = 0$ mais $xg(x) - yg(y) = 1$, et de même d ne convient pas car pour $x = 1$ et $y = -1$ on a $d(x+y)d(x-y) = 0$ mais $xd(x) - yd(y) = 1$.

Conclusion : $S = \big\{\,\mathrm{id}, x \mapsto 0\big\}$.

2. On cherche à déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (E).$$

   (a) Donner les formules d'addition pour $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. En déduire une solution particulière de (E).

   Cours. Du coup $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$. Comme on a $\cos(0) = 1$ et que la fonction cos est bien deux fois dérivable, cos est une solution particulière de (E).

   (b) Montrer que toute solution f de (E) est nécessairement paire et vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

   Soit f une éventuelle solution.

   En particularisant en $x = 0$, on trouve $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) + f(-y) = 2f(y)$, c'est-à-dire $\forall y \in \mathbb{R}, f(-y) = f(y)$.
   La fonction f est donc bien paire.

   En dérivant deux fois par rapport à x on obtient $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$.
   En dérivant deux fois par rapport à y on obtient $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.
   On en déduit : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, et pour $y = 0$, on trouve : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x) = f(x)f''(0)$.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E). *Raisonner par analyse-synthèse.*

   Ok donc je fais comme dit le monsieur.

   Analyse : Considérons une fonction f convenable. D'après la question précédente, f est solution d'une EDO de la forme $f'' = \lambda f$.
   Traitons les trois cas qui apparaissent naturellement alors :
   • Si $\lambda = 0$, f est de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$.
   • Si $\lambda > 0$, f est nécessairement de la forme $t \mapsto \alpha \exp(\sqrt{\lambda}t) + \beta \exp(-\sqrt{\lambda}t)$.
   • Si $\lambda < 0$, f est nécessairement de la forme $t \mapsto \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}t) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda}t)$.

   Synthèse : Testons nos candidats :
   • Si f est de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$, la condition $f(0) = 1$ donne $\beta = 1$ et en réinjectant, on constate que α est nécessairement nul – mais on le savait déjà puisque f doit être paire.
   • Si f est de la forme $t \mapsto \alpha \exp(\sqrt{\lambda}t) + \beta \exp(-\sqrt{\lambda}t)$, la condition $f(0) = 1$ donne $\alpha + \beta = 1$. En réinjectant, on constate qu'on a $\alpha = \beta$ – mais on le savait déjà puisque f doit être paire – et que $\lambda > 0$ peut être quelconque.
   • Si f est de la forme $t \mapsto \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}t) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda}t)$, la condition $f(0) = 1$ donne $\alpha = 1$. En réinjectant, on constate que β est nécessairement nul – mais on le savait déjà puisque f doit être paire – et que $\lambda < 0$ peut être quelconque.

Conclusion : Les solutions sont les $t \mapsto \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ avec $a > 0$, la fonction constante égale à 1 et les $t \mapsto \cos(at)$ avec $a > 0$. Plus synthétiquement, et par parité, l'ensemble des solutions est $S = \left\{t \mapsto \frac{e^{at}+e^{-at}}{2},\ a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{t \mapsto \cos(at),\ a \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 5. *Paramétrisation rationnelle du cercle épointé.*

On note $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et on pose $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$.
On considèrera Γ comme un ensemble de points du plan.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $x^2(t) + y^2(t)$. Qu'en conclut-on sur Γ ?

   Le calcul donne $x^2(t) + y^2(t) = 1$. D'après l'équation cartésienne du cercle unité, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Ceci étant vrai pour tout réel t, on en déduit **l'inclusion** $\Gamma \subset \mathcal{C}$.

   Dans les questions suivantes, on considère un $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on pose $t = \tan(\theta/2)$.

2. Justifier que t a un sens, mais qu'on n'aurait pas pu prendre θ dans $]-\pi, \pi]$.

   $\theta \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Aucun réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est la mesure d'un angle droit (ces mesures sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$), ils ont donc bien une tangente. Par contre, pour $\theta = \pi$, on obtient $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ qui est la mesure d'un angle droit direct et n'a donc pas de tangente.

3. Dans cette question, on redémontre les formules dites "d'angle moitié".
   Il ne s'agit donc pas de les nommer, mais bien de les redémontrer.
   (a) Montrer qu'on a $\sin(\theta) = y(t)$.
   (b) Montrer qu'on a $\cos(\theta) = x(t)$.

   On a $\sin(\theta) = 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2)\tan(\theta/2) = 2\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}}\tan(\theta/2) = 2\dfrac{1}{1+\tan^2(\theta/2)}\tan(\theta/2) = 2\dfrac{1}{1+t^2}t$.
   Et $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = 2\left(\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}}\right)^2 - 1 = 2\left(\dfrac{1}{1+\tan^2(\theta/2)}\right)^2 - 1 = \dfrac{2}{(1+t^2)^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

4. En conclusion, donner une description simple de Γ.

   On a montré, d'une part, que Γ ne contenait aucun point qui ne soit un point de $\mathcal{C}$. On a aussi montré, d'autre part, que tout point de $\mathcal{C}$ de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ appartenait bien à Γ. Il ne reste qu'à remarquer que le seul point du cercle n'étant pas de cette forme est celui obtenu pour $\theta = \pi$, c'est-à-dire le point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En conclusion $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c'est le cercle auquel on a enlevé un point, d'où le nom de cercle "épointé").