DC n° 02

Samedi 09/09/2017

Durée 2h.

Tout matériel électronique interdit.

Exercice 1. Deux équations

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x-24}+\sqrt{x-9}=\sqrt{x}$ d'inconnue réelle x.
2. Résoudre l'équation $2\cos(x)^2+5\sin(x)-4$ d'inconnue réelle x.

Exercice 2. Un système linéaire

On s'intéresse au système (S_λ) suivant : $\begin{cases} (1-\lambda)x+y-2z=0 \\ -2x+(4-\lambda)y-4z=0 \\ -x+y-\lambda z=0 \end{cases}$.

1. Résoudre le système (S_2) obtenu pour $\lambda=2$.
2. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\in\mathbb{R}$, quitte à faire apparaître plusieurs cas pour λ.

Exercice 3. Quelques irrationnalités

1. (a) Montrer l'énoncé suivant : $\forall n\in\mathbb{N},\ n^2\in 2\mathbb{N}\Rightarrow n\in 2\mathbb{N}$.
   (b) Montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. (a) Montrer l'énoncé suivant : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ln(x^n)=n\ln(x)$.
   On pourra utiliser sans démonstration la propriété $\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.
   (b) Montrer que le réel $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 4. Quelques équations fonctionnelles

1. Déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)f(x-y)=xf(x)-yf(y)\quad(\star)$$

2. On cherche à déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0)=1 \text{ et } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\quad(E).$$

   (a) Donner les formules d'addition pour $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. En déduire une solution particulière de (E).
   (b) Montrer que toute solution f de (E) est nécessairement paire et vérifie $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E). *Raisonner par analyse-synthèse.*

(Attention, on a un dernier exercice au verso !)

Exercice 5. Paramétrisation rationnelle du cercle épointé

On note $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et on pose $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$.
On considèrera Γ comme un ensemble de points du plan.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $x^2(t) + y^2(t)$. Qu'en conclut-on sur Γ ?

   Dans les questions suivantes, on considère un $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on pose $t = \tan(\theta/2)$.

2. Justifier que t a un sens, mais qu'on n'aurait pas pu prendre θ dans $]-\pi, \pi]$.

3. Dans cette question, on redémontre les formules dites "d'angle moitié".
   Il ne s'agit donc pas de les nommer, mais bien de les redémontrer.
   (a) Montrer qu'on a $\sin(\theta) = y(t)$.
   (b) Montrer qu'on a $\cos(\theta) = x(t)$.

4. En conclusion, donner une description simple de Γ.