# DC $n°$ 01

Corrigé

## Exercice 0. Cours

Lol.

## Exercice 1. Dérivation

1. Soit $I$ un intervalle, $a \in I$, et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. Définir : *nombre dérivé de $f$ en $a$*.

   Cf cours.

2. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   On note $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f\big(x^2\big)$.
   Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'$.

   Notons $c$ la fonction carré. La fonction $g = f \circ c$ est une composée de fonctions dérivables donc d'après le théorème de dérivation des fonctions composée elle est dérivable de dérivée $g' = c' \times f' \circ c$ *i. e.* $g' = x \mapsto c'(x)\dfrac{1}{c(x)^2+1} = x \mapsto \dfrac{2x}{x^4+1}$.

## Exercice 2. Équations différentielles

### Équations différentielles du premier ordre

1. Résoudre : $y'(t) + 2y(t) = \sin(2t)$.

   $\boxed{\text{I.}}$ On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$.
   Après réinjection, on cherche donc $\alpha$ et $\beta$ tels que l'on ait :

$$-2\alpha\sin(2t) + 2\beta\cos(2t) + 2\big(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\big) = \sin(2t)$$

$$i.\ e.\ \ : \big(2\beta - 2\alpha\big)\sin(2t) + \big(2\beta + 2\alpha\big)\sin(2t) = \sin(2t)$$

   Il suffit de choisir $\alpha$ et $\beta$ tels que $\begin{cases} 2\beta - 2\alpha = 1 \\ 2\beta + 2\alpha = 0 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} \alpha = -1/4 \\ \beta = 1/4 \end{cases}$.
   Une solution particulière est donc $t \mapsto \dfrac{\sin(2t) - \cos(2t)}{4}$.

   $\boxed{\text{II.}}$ On cherche les solutions homogènes. D'après le cours elles forment l'ensemble $\big\{t \mapsto K\mathrm{e}^{-2t},\ K \in \mathbb{R}\big\}$.

   $\boxed{\text{III.}}$ On conclut : d'après un théorème du cours, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\Big\{t \mapsto K\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{\sin(2t) - \cos(2t)}{4},\ K \in \mathbb{R}\Big\}$.

2. Résoudre : $\begin{cases} y'(t) - y(t) = 2\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

   $\boxed{\text{I.}}$ On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha\mathrm{e}^{-t}$.
   Après réinjection, on cherche donc $\alpha$ tel que l'on ait $-\alpha\mathrm{e}^{-t} - \alpha\mathrm{e}^{-t} = 2\mathrm{e}^{-t}$ ce qui équivaut à $\alpha = -1$.
   Une solution particulière est donc $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$.

   $\boxed{\text{II.}}$ On cherche les solutions homogènes. D'après le cours elles forment l'ensemble $\big\{t \mapsto K\mathrm{e}^{t},\ K \in \mathbb{R}\big\}$.

   $\boxed{\text{III.}}$ On conclut : d'après un théorème du cours, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\big\{t \mapsto K\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t},\ K \in \mathbb{R}\big\}$.

## Équations différentielles du second ordre

3. Résoudre : $\left\{\begin{array}{l} 9y''(t)+6y'(t)+y(t)=0 \\ y(1)=y'(1)=1. \end{array}\right.$

   $\boxed{\text{I., II., III.}}$ L'équation différentielle est homogène. Son équation caractéristique est $9r^2+6r+1=0$ *i. e.* $(3r+1)^2=0$ qui a une unique solution $r_0=-\frac{1}{3}$. D'après le cours l'ensemble des solutions est donc $\left\{t\mapsto(A+Bt)\mathrm{e}^{-t/3},\ K\in\mathbb{R}\right\}$.

   $\boxed{\text{IV.}}$ On réinjecte dans les conditions initiales :
   $$\left\{\begin{array}{l} y(1)=1 \\ y'(1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (A+B)\mathrm{e}^{-1/3}=1 \\ \left(\frac{2}{3}B-\frac{1}{3}A\right)\mathrm{e}^{-1/3}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (A+B)=\mathrm{e}^{1/3} \\ (2B-A)=3\mathrm{e}^{1/3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{-\mathrm{e}^{1/3}}{3} \\ B=\frac{4\mathrm{e}^{1/3}}{3} \end{array}\right. .$$
   Conclusion : l'unique solution est $t\mapsto\dfrac{(4t-1)}{3}\mathrm{e}^{\frac{1-t}{3}}$.

4. Résoudre : $\left\{\begin{array}{l} y''(t)+2y(t)=2 \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}\right.$

   $\boxed{\text{I.}}$ On cherche une solution particulière constante $y_p=t\mapsto k$.
   Après réinjection, on cherche donc $k$ tel que l'on ait : $2k=2$, *i. e.* $k=1$.
   Une solution particulière est donc $t\mapsto 1$.

   $\boxed{\text{II.}}$ On cherche les solutions homogènes. L'équation caractéristique est $r^2+2=0$ *i. e.* $(r+\sqrt{2}\mathrm{i})(r-\sqrt{2}\mathrm{i})=0$ qui a deux solutions complexes conjuguées $\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$. D'après le cours l'ensemble des solutions est $\left\{t\mapsto A\cos(\sqrt{2}t)+B\sin(\sqrt{2}t),\ \binom{A}{B}\in\mathbb{R}^2\right\}$.

   $\boxed{\text{III.}}$ On conclut sur léquation sans les conditions initiales : d'après un théorème du cours, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{t\mapsto A\cos(\sqrt{2}t)+B\sin(\sqrt{2}t)+1,\ \binom{A}{B}\in\mathbb{R}^2\right\}$.

   $\boxed{\text{IV.}}$ On réinjecte dans les conditions initiales :
   $$\left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+1=0 \\ B\sqrt{2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$
   Conclusion : l'unique solution est $t\mapsto\dfrac{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)}{2}-\cos(\sqrt{2}t)+1$.

## Exercice 3. Dérivation

On rappelle qu'on a $\ln(\mathrm{e})=1$ avec $\mathrm{e}\approx 2.718$. Pour tout réel $x>0$, on note $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'$.

   La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction $f$ est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable et ne s'annulant pas, et on a, pour tout $x\in]0,+\infty[$ :
   $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)}=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ en notant $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$.

2. Étudier $f$. On donnera les variations de $f$ mais aussi ses limites en 0 et en $+\infty$ ainsi que sa valeur en 1 et celles de ses éventuels extrema.

   D'après l'expression de la dérivée, on a :
   $$\begin{array}{rcl} f'(x)\geqslant 0 & \Leftrightarrow & 1-\ln(x)\geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & \ln(x)\leqslant 1 \\ & \Leftrightarrow & \ln(x)\leqslant\ln(e) \\ & \Leftrightarrow & x\leqslant e \text{ par croissance de } \ln \end{array}$$

• On a vu qu'on a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$ puis $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ puis $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.
On a donc $f$ strictement croissante sur $]0, e]$ puis strictement décroissante sur $[e, +\infty[$ puisque ce sont des intervalles.

• Par ailleurs, le calcul direct donne $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f(e) = \frac{1}{e}$, $f'(e) = 0$. La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1, avec tangente parallèle à la première bissectrice, et elle a une tangente horizontale au point $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ ; qui corespond donc à un maximum global de la fonction, et plus précisément son unique extremum. Comme $\dfrac{1}{e} > 0$, l'étude précédente indique que $f$ reste strictement positive sur $[e, +\infty[$ et s'annule exactement une fois sur $]0, e]$. Comme $f(1) = 0$, $f$ s'annule uniquement en 1.

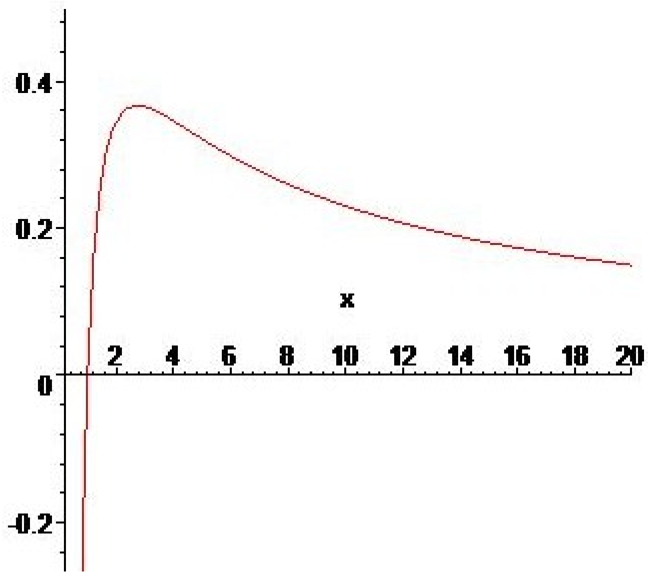
• Enfin, les limites. D'après le cours de TS, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée). D'après le cours de TS on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée).

• On peut synthétiser tout ce qui précède par un tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | **1** | $+$ | **0** | $-$ | |
| $f(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | **0** | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | **0** |

3. Tracer la courbe représentative de $f$. (On ne prendra pas un repère orthonormé mais un repère orthogonal d'unité 2cm en abscisse et 8cm en ordonnée.)

Yapuka :




Dans toute la suite, on s'intéresse aux solutions <u>dans $\mathbb{N}$</u> du système $\begin{cases} x^y = y^x \\ 0 < x < y \end{cases}$ $(S)$.

4. Montrer que si $(x, y)$ est une solution de $(S)$, alors $f(x) = f(y)$.

Si $(x, y)$ est une solution de $(E)$, alors $x^y = y^x$ et cette quantité est strictement positive car $x$ (ou $y$) l'est. On peut donc appliquer la fonction ln ce qui donne $\ln\left(x^y\right) = \ln\left(y^x\right)$. De plus, $x$ et $y$ sont des entiers donc d'après un résultat du cours de TS, cette égalité se réécrit : $y \ln(x) = x \ln(y)$, puisque $x > 0$ et $y > 0$. D'où : $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(y)}{y}$, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$, puisque $x > 0$ et $y > 0$ encore.

5. En déduire le plus soigneusement possible que si $(x, y)$ est une solution de $(S)$, alors on a $1 < x < \mathrm{e}$ et $\mathrm{e} < y$.

   Distinguons trois cas :

   • Supposons $0 < x < y \leqslant e$.
   Par stricte croissance de $f$ sur $]0, e]$, de $f(x) = f(y)$ on déduit $x = y$ : contradiction.
   Ce cas est donc exclus.

   • Supposons $e \leqslant x < y$.
   Par stricte décroissance de $f$ sur $[e, +\infty[$, de $f(x) = f(y)$ on déduit $x = y$ : contradiction.
   Ce cas est donc exclus.

   • Supposons $x \leqslant e \leqslant y$.
   Si $x = e$, on a $f(y) = f(e)$ et par stricte décroissance de $f$ sur $[e, +\infty[$, on déduit $y = e = x$ : contradiction.
   De même si $y = e$, on a $f(x) = f(e)$ et par stricte croissance de $f$ sur $]0, e]$, on déduit $x = e = y$ : contradiction.
   Supposons enfin $x \leqslant 1$. On a alors, par croissance de $f$ sur $]0, e]$, $f(x) \leqslant 0$. Mais on a aussi $y > e$, donc $f(y) > 0$ d'après l'étude précédente, et aussi $f(y) = f(x) \leqslant 0$ : contradiction.
   Finalement dans ce cas on a nécessairement $1 < x < e < y$.

   ▷ En conclusion, le seul cas non impossible est $1 < x < e < y$.
   Ainsi, $f(x) = f(y)$ et $x < y$ impliquent bien $x \in ]1, e[$ et $y \in ]e, +\infty[$.

6. Résoudre $(S)$.

   Raisonnons par analyse-synthèse.

   • Analyse : Si $(x, y)$ est une solution de $(E)$, alors $f(x) = f(y)$ et $x < y$, donc d'après la question précédente $x \in ]1, e[$ et $y \in ]e, +\infty[$. Comme de plus $x$ est entier, on a $x = 2$ puisque 2 est le seul entier de l'intervalle $]1, e[$ (un rappel nous indique qu'on a $\mathrm{e} \approx 2,718$).
   Si $(x, y)$ est une solution de $(E)$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, alors $x = 2$ et $y \in ]e, +\infty[$ (d'après 5).
   La fonction $f$ étant strictement décroissante sur $]e, +\infty[$, il existe au plus un antécédent à $f(2)$ dans $]e, +\infty[$.
   Cet éventuel antécédent est-il entier ? On teste : 3 ne convient pas, mais 4 convient.
   Résumons : si $(x, y)$ est une solution de $(E)$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, alors $x = 2$ et $y = 4$.
   Autrement dit, on a un unique candidat pour être solution.

   • Synthèse : Réciproquement, $(2, 4)$ est bien une solution de $(E)$.

   • Conclusion : Finalement, l'ensemble des solutions entières de $(E)$ est $S = \{(2, 4)\}$.