DC n° 01

Samedi 09/09/2017

Durée 1h30.

Tout matériel électronique interdit.

Exercice 0. Cours

1. Je dois démontrer un énoncé qui commence par $\forall z \in \mathbb{C}, \ \ldots$: comment commence ma démonstration ?
2. Je dois démontrer un énoncé qui commence par $\exists z \in \mathbb{C}, \ \ldots$: par quel mot commence ma démonstration ?

Exercice 1. Dérivation

1. Soit I un intervalle, $a \in I$, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Définir : *nombre dérivé de f en a.*
   Donc, là, il ne faut plus répondre : « c'est $f'(a)$ »...
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = f\big(x^2\big)$.
   Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 2. Équations différentielles

Équations différentielles du premier ordre

1. Résoudre : $y'(t) + 2y(t) = \sin(2t)$.
2. Résoudre : $\begin{cases} y'(t) - y(t) = 2\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Équations différentielles du second ordre

3. Résoudre : $\begin{cases} 9y''(t) + 6y'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = y'(1) = 1. \end{cases}$
4. Résoudre : $\begin{cases} y''(t) + 2y(t) = 2 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$

Exercice 3. Dérivation

On rappelle qu'on a $\ln(\mathrm{e}) = 1$ avec $\mathrm{e} \approx 2.718$. Pour tout réel $x > 0$, on note $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
2. Étudier f. On donnera les variations de f mais aussi ses limites en 0 et en $+\infty$ ainsi que sa valeur en 1 et celles de ses éventuels extrema.
3. Tracer la courbe représentative de f. (On ne prendra pas un repère orthonormé mais un repère orthogonal d'unité 2cm en abscisse et 8cm en ordonnée.)

Dans toute la suite, on s'intéresse aux (éventuelles) solutions dans $\mathbb{N}$ du système $\begin{cases} x^y = y^x \\ 0 < x < y \end{cases} \quad (S)$.

4. Montrer que si (x, y) est une solution de (S), alors $f(x) = f(y)$.
5. En déduire le plus soigneusement possible que si (x, y) est une solution de (S), alors on a $1 < x < \mathrm{e}$ et $\mathrm{e} < y$.
6. Résoudre (S).