Concours blanc $n°1$

Corrigé

Sujet A

Exercice 1. *CCP*

Cf banque CCP (ou le cours sur $\mathbb{Z}$!)

Exercice 2. *Angle maximal.*

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur $h+p$. Un observateur de taille h se place à distance d et regarde alors la statue sous un angle α (on négligera la distance entre les yeux de l'observateur et le sommet de son crâne).

1. Faire un dessin.

   Fastoche.

2. Donner sans démonstration la définition, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction arctan.

   Question de cours.

3. Quelle doit être la distance d pour que α soit maximal ?

   Notons B le point du piédestal à hauteur h, M le sommet du piédestal, H le sommet de la statue et O le sommet du crâne de l'observateur (identifié avec ses yeux). On a B, M, H alignés, (BH) orthogonale à (BO), $BM = p$, $MH = s$, $BO = d$ et $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$.

   Considérons α comme une fonction de d. On a $\alpha(0) = 0$, $\lim\limits_{d\to+\infty} \alpha(d) = 0$, cherchons l'éventuel maximum de α sur $\mathbb{R}_+$.

   Notons $\beta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}\right)$ et considérons β comme une fonction de d.

   On a $\tan(\alpha(d)+\beta(d)) = \dfrac{d}{p+s}$ et $\tan(\beta(d)) = \dfrac{d}{p}$. Par construction, $\alpha+\beta$ et β prennent leurs valeurs sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc $\alpha(d)+\beta(d) = \arctan\left(\dfrac{p+s}{d}\right)$ et $\beta(d) = \arctan\left(\dfrac{p}{s}\right)$.

   D'où finalement $\alpha(d) = \arctan\left(\dfrac{p+s}{d}\right) - \arctan\left(\dfrac{p}{d}\right)$.

   Tous calculs faits (merci le TDFC et la question précédente) on trouve $\alpha'(d) = -\dfrac{s(d^2 - p(p+s))}{(p^2+d^2)((p+s)^2+d^2)}$ si bien que $\alpha'(d) = 0 \Leftrightarrow d = \sqrt{p(p+s)}$.

   Il est facile de voir qu'on a $\alpha' \geqslant 0$ pour $d \leqslant \sqrt{p(p+s)}$ et $\alpha' \leqslant 0$ pour $d \geqslant \sqrt{p(p+s)}$. D'après le théorème sur le signe de la dérivée, et puisque $\left[0, \sqrt{p(p+s)}\right]$ et $\left[\sqrt{p(p+s)}, +\infty\right[$ sont des intervalles, α atteint son maximum global en $\boxed{d = \sqrt{p(p+s)}}$.

Sujet B

Question apéritive

1. B)D). Les imposteurs ont écrit autre chose.

Partie I

On note (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. B). Les solutions sont les $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ donc il n'y a pas cos, il y a $t \mapsto e^{-t}$ pour $\lambda = 0$, $\mu = 1$, il y a sh pour $\lambda = -\mu = 1/2$ et il y a la fonction nulle qui est polynomiale pour $\lambda = \mu = 0$.

3. B). C'est un problème de Cauchy donc existence et unicité de la solution. On a déjà vu que cos n'était pas solution.

4. B)D). Si $\lambda = 0$ alors $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} \to 0$, si $\lambda > 0$ alors $y(t) \to +\infty$ et si $\lambda < 0$ alors $y(t) \to -\infty$.

5. C)D). Les solutions sont les $t \mapsto \mu e^{-t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Partie II

Soient a et b deux réels strictements positifs fixés tels que $b \leqslant a$. On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$.

6. A). Pour $n \geqslant 1$ on a $a_n - b_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0$ et ok aussi pour $n = 0$. Oui il y avait deux questions D), mais toutes les deux fausses à cause du signe.

7. $\emptyset$. $(b_n)_n$ est croissante et majorée par a, $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par b.

8. B). Il suffit de voir qu'elles ont une même limite or elles convergent d'après la question précédente. On passe à la limite dans $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et c'est bon.

9. C). On a $a_{n+} - b_{n+1} = \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1}}\right)$, le reste en découle.

10. $\emptyset$. On a $d_n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$, ça ressemble mais c'est rien qui est dans la liste.

Partie III

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit qu'une partie S de A est dite **multiplicative** lorsque S est stable par $\times$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n(A)$ l'ensemble des éléments x de A pouvant s'écrire sous la forme $x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ avec x_1, x_2, ..., x_n dans A.

11. D). Après calcul l'égalité du D) est vraie alors que $x = y = z = t = 1$ constitue un contre-exemple à celle du A). Celles du B) et du C) parlent seulement des sous-anneaux de $\mathbb{C}$, ce que n'est pas nécessairement A.

12. A) Les carrés modulo 8 sont $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{4}$ donc B et C sont faux. On a $\overline{6} = \overline{2}^2 + \overline{1}^2 + \overline{1}^2 \in S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ et donc D est faux. Je ne détaille pas tous les calculs montrant que A est vraie.

13. D). Si k est impair alors $k^2 \equiv 1$ [8], ainsi, si les quatre entiers a, b, c, d sont impairs alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \not\equiv 0$ [8]. Mais si exactement un ou exactement trois des entiers a, b, c, d est (sont) impair(s) alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est impair donc ne peut pas être congru à 0 modulo 8. Enfin si exactement deux des entiers a, b, c, d sont impairs, on peut supposer à renommage près qu'il s'agit de a et b, de sorte que c et d peuvent sécrire sous la forme $c = 2p$, $d = 2q$, et finalement $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 2 + 4(p^2 + q^2) \equiv 2$ ou 6 [8].

En conclusion, il est impossible que un, deux, trois ou les quatre entiers a, b, c et d soient impairs ; ils sont donc tous pairs.

14. B). Soit $n \equiv -1$ [8].
Montrons tout d'abord $n \notin S_3(\mathbb{Z})$ par l'absurde. Supposons qu'il existe a, b, c dans $\mathbb{Z}$ tels que $n = a^2+b^2+c^2$. Modulo 8, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 + 1^2 \equiv 0$ [8]. C'est impossible d'après la question 21.
Montrons maintenant $n \notin S_3(\mathbb{Q})$ par l'absurde. Supposons qu'il existe u, v, w dans $\mathbb{Q}$ tels que $n = u^2 + v^2 + w^2$. On peut écrire u, v, w sous la forme $u = \frac{a'}{a}$, $u = \frac{b'}{b}$, $u = \frac{c'}{c}$ (formes non nécessiarement irréductibles). En réinjectant on trouve $n(abc)^2 = (a'bc)^2 + (ab'c)^2 + (abc')^2 \quad (*)$. Notons $v = \min\big(v_2(abc), v_2(a'bc), v_2(ab'c), v_2(abc')\big)$ de sorte que 2^v divise les quatre nombres abc, $a'bc$, $ab'c$, abc'. En divisant l'égalité $(*)$ par 2^{2v} on obtient une égalité de la forme $n\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ où au moins un des entiers α, β, γ, λ est impair. En réduisant modulo 8 on obtient $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2 \equiv 0$ [8], ce qui est impossible puisqu'un des quatre entiers n'est pas pair.

15. B). On a, de façon évidente, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 \in S_3(\mathbb{Q})$ $5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 \in S_3(\mathbb{Q})$, et comme $15 \equiv -1$ [8], d'après la question précédente, $15 \notin S_3(\mathbb{Q})$. Comme on a $15 = 3 \times 5$, $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif. Donc A est fausse et B est vraie. Le même argument montre que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas multiplicatif donc C et D sont fausses aussi.

Partie IV

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $1 \leqslant k \leqslant 3$, on note

$$C_k(A) = \sum_{i=1}^{3} a_i k \text{ et } L_k(A) = \sum_{j=1}^{3} a_k j.$$

On note $\mathcal{M} = \big\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A)\big\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}$, on note $S(A)$ la valeur commune des six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. A). On a toujours $(aI)^n = a^n I$ et donc $L_i((aI)^n) = C_i((aI)^n) = a^n$. A est correcte et la B fausse car pour $a \notin \{0, 1\}$ on a $a^n \neq a^{n-1}$. On a $(aJ)^n = 3^{n-1}a^n J$ seulement pour $n \geqslant 1$ donc D est fausse.

17. D). On doit avoir $L_3(K) = C_1(K)$, *i. e.* $u - 1 = u - 2$, et donc $1 = 2$. Nope.

18. A)C). Pour C c'est évident. Pour A et B on réécrit simplement les égalités $L_i(M) = C_j(M) = s$. Pour D la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{M}$ mais pas CL des matrices proposées.

19. B)C) On a $I_3 \in \mathcal{M}$ ce qui invalide clairement A. Pour toute matrice A on a $AJ = JA \Leftrightarrow L_1(A) = C_1(A) = L_2(A) = C_2(A) = L_3(A) = C_3(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$.

20. A)C). Si A et B sont dans $\mathcal{M}$ alors on a $AJ = JA$ et $BJ = JB$ donc $ABJ = AJB = JAB$ et donc $AB \in \mathcal{M}$ et $s(AB) = s(A)s(B)$. Idem pour l'inverse.

Partie V

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

21. $\emptyset$. Par linéarité de l'intégrale : $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$.

22. B). Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par TLM. La suite n'est clairement pas constante et des C et D sont ubuesques.

23. B)C). Par positivité : $I_n \leqslant I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$. Comme il existe au plus deux réponses correctes, il faut croire qu'on a, du moins pour certains n, $I_n > \dfrac{1}{2n+3}$. $\left(\text{Et effectivement, on a } I_0 = \dfrac{\ln(2)}{2} > \dfrac{1}{3}\ldots\right)$

24. D). Récurrence sans astuce.

25. A). IPP.

26. D). Par linéarité de la limite. Les autres présentent un problème de signe.

Partie VI

On considère le système (E) : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c, \end{array}\right.$ où a, b, c désignent trois nombres complexes donnés.

27. B)C) C'est du cours.

28. A) En utilisant $j^3 = 1$, $j^4 = j$.

29. C) Après résolution.

30. D). Pour $a = 1$, $b = j$, $c = j^2$ on a $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ donc A et C sont faux. De plus $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ implique $a = x + y + z \in \mathbb{R}$ donc B est faux. Enfin on a $3y = a + j^2 b + jc$ et $3z = a + jb + j^2 c$ donc si a est réel et b et c sont conjugués alors y et z sont réels, réciproquement si y et z sont réels en réinjectant b et c sont conjugués et a réel.

Partie VII

31. B) A est faux sans supposer f strictement décroissante. En appliquant le théorème de la bijection à $f - id$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ on obtient qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$ et que ce réel est dans $]\alpha, \beta[$. Donc B est vrai et C et D sont faux.

32. B) A est faux sans supposer f strictement croissante. B est vrai par TVI. C et D sont faux si f est strictement extensive par exemple.

33. C)D). Le théorème de la bijection donne C appliqué à tan donne C et appliqué à $\tan - id$ donne D. Cela exclut évidemment A et B (unicité).

34. C). Les réponses A et B n'ont pas de sens et méritent une mort-subite, la C est évidente (TdG) et la D est donc fausse.

35. $\emptyset$ On a $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$ évidement, et donc $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$.

36. D) On utilise $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/x_n)$ car $x_n > 0$ et le DL de arctan car $1/x_n \to 0$, ce qui donne C fausse et D vraie. Bien sûr A et B sont grotesques.