Concours blanc $n°1$

Lundi 08 janvier 2018

BONNE ANNÉE

Le devoir est composé de **deux sujets**.

Le premier sujet est sur 12 points. Il est conseillé d'y consacrer une heure. Veillez à bien détailler vos calculs et à bien encadrer vos résultats.

Le second sujet est sur 24 points. C'est un QCM de format ENAC, il est composé de 36 questions mais vous devrez ne répondre qu'à 24 questions. Il est conseillé d'y consacrer deux heures. Les modalités de réponse sont indiquées que début du sujet.

Les calculatrices sont interdites

Sujet A

Exercice 1. *CCP*

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : Procéder par récurrence.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 2. *Angle maximal*

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur $h + p$. Un observateur de taille h se place à distance d et regarde alors la statue sous un angle α (on négligera la distance entre les yeux de l'observateur et le sommet de son crâne).

1. Faire un dessin en faisant figurer les quantités s, h, p et α.
2. Donner sans démonstration la définition, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction arctan.
3. Quelle doit être la distance d pour que α soit maximal ?

Sujet B

Le sujet comporte 36 questions **mais les candidats devront répondre à uniquement 24 questions**, de leur choix. Il est inutile de répondre à davantage de questions car le correcteur mort-subitera chaque copie après la $24^{\text{ième}}$ réponse.

Il est demandé aux candidats d'écrire une courte phrase de justification à la suite de chaque réponse. Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il n'aura aucun moyen de le signaler et les surveillants ne sont pas autorisés à la signaler non plus : d'où l'intérêt de la courte phrase de justification. Une autre solution sage est de ne pas traiter la question (rappel : il ne faut pas en traiter plus de 24).

Remarques :

1. Certaines questions, de numéros consécutifs, sont liées. Lorsque tel est le cas, c'est systématiquement indiqué sur le sujet.
2. Chaque question comporte au plus deux réponses exactes (et peut donc comporter 0, 1 ou 2 réponses exacte). Attention, n'est considérée comme correcte qu'une réponse donnant la liste exacte des bonnes réponses : une réponse incomplète ou seulement partiellement correcte est considérée comme fausse.
3. **Les questions doivent être traitées dans l'ordre.** Pour chaque question numérotée entre 1 et 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

   i/ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, il est alors impératif que le numéro de la question **n'apparaisse pas sur votre copie**.

   ii/ soit vous décidez de traiter cette question, vous écrivez alors le numéro de la question suivi de la liste des bonnes réponses ; si vous jugez que cette liste est vide, écrivez le symbole $\emptyset$.

   Allez à la ligne entre chaque réponse et n'oubliez pas la petit phrase de justification.
4. Le barème est le même pour chaque question : les mauvaises réponses rapportent 0 point (pas de pénalité), les bonnes réponses rapportent 1 point.
5. Exemples de questions/réponses :

   Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut : A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

   Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut : A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

   Question 3 : une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend, sur tout voisinage de cette singularité, tout nombre complexe exactement n fois comme valeur, à l'exception d'au plus m complexes, avec : A) n=1 B) n≠1 C)n=+∞ D)m=1

   Question 4 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est : A) 1 B) 0 C) -1 D) 2.

   On pourra répondre :
   1) B. Justification : C'est ce que donne un calcul direct.
   2) $\emptyset$. Justification : On trouve 3 qui n'est pas dans la liste.
   4) A, C. Justification : J'utilise la méthode du discriminant, je trouve deux racines 1 et -1.
   … sauf si vous décidez de répondre à la question 3, mais c'est déconseillé car il y a erreur d'énoncé dans cette question (on a 3 bonnes réponses), comme vous l'avez évidemment remarqué.

Question apéritive

1. L'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2$:

   A) dépend de x B) dépend de f C) est vrai pour $f = x \mapsto x^2$ D) est vrai pour f constante.

Partie I

Les questions 2 à 5 sont liées. On note (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. L'équation (E) :
   A) a pour solution la fonction cos
   B) a pour solution la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$
   C) n'a pas pour solution la fonction sh
   D) n'a pas de solution polynomiale.

3. On cherche toutes les solutions y de (E) telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
   A) Il n'existe aucune solution de (E) vérifiant les deux conditions.
   B) Il existe exactement une solution de (E) vérifiant les deux conditions.
   C) Il existe plusieurs solutions de (E) vérifiant les deux conditions.
   D) La fonction cos est une solution de (E) vérifiant les deux conditions.

4. On suppose que y est une solution de (E), dont on ne sait rien de plus.
   A) Il est possible que y n'ait pas de limite en $+\infty$.
   B) Nécessairement y a une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.
   C) Nécessairement y a une limite finie en $+\infty$.
   D) Si y a une limite en $+\infty$, alors celle-ci est nulle ou infinie.

5. On cherche toutes les solutions y de (E) telles que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y'(t) = 0$.
   A) Il n'existe aucune solution de (E) vérifiant les deux conditions.
   B) Il existe exactement une solution de (E) vérifiant les deux conditions.
   C) Il existe plusieurs solutions de (E) vérifiant les deux conditions.
   D) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E) vérifiant les deux conditions.

Partie II

Les questions 6 à 10 sont liées. Soient a et b deux réels strictements positifs fixés tels que $b \leqslant a$. On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$.

6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   A) $0 < b_n \leqslant a_n$ pour tout entier naturel n
   B) $0 < a_n \leqslant b_n$ pour tout entier naturel n
   D) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n}\big(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\big)$
   D) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\big(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\big)$

7. La suite :
   A) $(a_n)_n$ est croissante et majorée par b
   B) $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par a
   C) $(b_n)_n$ est décroissante et minorée par a
   D) $(b_n)_n$ est croissante et majorée par b

8. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$:
   A) ne sont pas adjacentes mais elles sont convergentes
   B) sont adjacentes
   C) ne peuvent être adjacentes car elles ne convergent pas vers une même limite
   D) ne sont pas toutes convergentes

9. On établit que, pour tout entier naturel n :
   A) $\big(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\big)^2/2 \leqslant a_{n+1}-b_{n+1} \leqslant \big(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}}\big)^2$
   B) $\big(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}}\big)^2/2 \leqslant b_{n+1}-a_{n+1} \leqslant \big(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\big)^2$
   C) $\big(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}}\big)^2 \leqslant a_{n+1}-b_{n+1} \leqslant \big(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\big)^2/2$
   D) $\big(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{b_{n+1}}\big)^2 \leqslant b_{n+1}-a_{n+1} \leqslant \big(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\big)^2/2$

10. On pose, pour tout n entier naturel, $d_n = \sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}$. On montre qu'on a, pour tout entier naturel n :
    A) $(1/2)^n\big(\sqrt{a}-\sqrt{b}\big) \leqslant d_n$
    B) $(1/\sqrt{2})^n\big(\sqrt{a}-\sqrt{b}\big) \leqslant d_n$
    C) $d_n \leqslant (-1/\sqrt{2})^n\big(\sqrt{a}-\sqrt{b}\big)$
    D) $d_n \leqslant (1/\sqrt{2})^n\big(\sqrt{b}-\sqrt{a}\big)$

Partie III

Les questions 11 à 15 sont liées. Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

Par exemple, A pourra être $\mathbb{Z}$ muni de ses lois usuelles, ou encore l'ensemble $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \big\{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{7}\big\}$ des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo 8, muni des lois $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$ et $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a\times b}$.

On dit qu'une partie S de A est dite **multiplicative** lorsque S est stable par $\times$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n(A)$ l'ensemble des éléments x de A pouvant s'écrire sous la forme $x = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ avec x_1, x_2, …, x_n dans A.

11. $S_2(A)$ est une partie multiplicative de A car :
    A) $\forall (x,y,z,t)\in A^4,\ (x^2+y^2)(z^2+t^2)=(xz-yt)^2+(yz-xt)^2$
    B) $\forall (x,y,z,t)\in A^4,\ \big|x+\mathrm{i}y\big|\cdot\big|z+\mathrm{i}t\big| = \big|z+\mathrm{i}t\big|(x-\mathrm{i}y)(z+\mathrm{i}t)\big|$
    C) $\forall (x,y,z,t)\in A^4,\ \big|x+\mathrm{i}y\big|\cdot\big|z+\mathrm{i}t\big| = \big|z+\mathrm{i}t\big|(x+\mathrm{i}y)(z+\mathrm{i}t)\big|$
    D) $\forall (x,y,z,t)\in A^4,\ (x^2+y^2)(z^2+t^2)=(xz-yt)^2+(yz+xt)^2$

12. On établit que :
    A) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{45},\overline{6}\}$
    B) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{3}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{45},\overline{6}\}$
    C) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{45},\overline{6}\}$
    D) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{45},\overline{7}\}$

13. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ tels que $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0\ [8]$.
    A) On ne peut pas établir la parité de a, b, c, d.
    B) Parmi les nombres a, b, c, d, certains sont pairs et d'autres sont impairs.
    C) a, b, c, d, sont nécessairement impairs.
    D) a, b, c, d, sont nécessairement pairs.

14. On en déduit que :
    A) Si on a $n\equiv -1\ [8]$ alors $n\in S_3(\mathbb{Z})$ et $n\in S_3(\mathbb{Q})$.
    B) Si on a $n\equiv -1\ [8]$ alors $n\notin S_3(\mathbb{Z})$ et $n\notin S_3(\mathbb{Q})$.
    C) Si on a $n\equiv -1\ [8]$ alors $n\in S_3(\mathbb{Z})$ et $n\notin S_3(\mathbb{Q})$.
    D) Si on a $n\equiv -1\ [8]$ alors $n\notin S_3(\mathbb{Z})$ mais $n\in S_3(\mathbb{Q})$.

15. On en déduit que :
    A) $S_3(\mathbb{Q})$ est multiplicative.
    B) $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicative.
    C) $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicative mais $S_3(\mathbb{Z})$ est multiplicative.
    D) $S_3(\mathbb{Q})$ est multiplicative car $S_3(\mathbb{Z})$ est multiplicative.

Partie IV

Les questions 16 à 20 sont liées. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3, et $1 \leqslant k \leqslant 3$, on note

$$C_k(A) = \sum_{i=1}^{3} a_i k \text{ et } L_k(A) = \sum_{j=1}^{3} a_k j.$$

On note $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A)\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}$, on note $S(A)$ la valeur commune des six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. On démontre que :
A) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(aI)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\big((aI)^n\big) = a^n$.
B) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(aI)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\big((aI)^n\big) = a^{n-1}$.
C) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(aJ)^n = 3^{n-1}a^nJ$, et $(aJ)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\big((aJ)^n\big) = 3^{n-1}a^n$.
D) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(aJ)^n = 3^{n-1}a^nJ$, et $(aJ)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\big((aJ)^n\big) = (3a)^n$.

17. Soient deux nombres réels u et v et la matrice K définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -2 & 5 & 3 \\ u & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
A) Il existe un unique couple de réels (u, v) tel que $K \in \mathcal{M}$.
B) Il existe exactement deux couples de réels (u, v) tels que $K \in \mathcal{M}$.
C) Il existe une infinité de couples de réels (u, v) tels que $K \in \mathcal{M}$.
D) Il n'existe pas de couples de réels (u, v) tels que $K \in \mathcal{M}$.

18. Notons $L = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e, x, y, z, t) \in \mathbb{R}^6$.
A) $L \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c \\ y = a + c \\ z = a + b + c - d \\ t = -c + d \end{cases}$
B) $L \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - d - e \\ t = -c + d + e \end{cases}$
C) $L \in \mathcal{M}$ si et seulement si ${}^tL \in \mathcal{M}$.
C) $L \in \mathcal{M}$ si et seulement si L est une combinaison linéaire des matrices I, J, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
.

19. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :
A) $AJ = -JA \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$.
B) $AJ = JA \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$.
C) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $AJ = s(A)J$.
D) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $AJ = \lambda J$ pour un réel λ qui n'ést pas nécessairement égal à $s(A)$.

20. On a :
A) Si $(A, B) \in \mathcal{M}^2$ alors $AB \in \mathcal{M}$ et $s(AB) = s(A)s(B)$.
B) Si $(A, B) \in \mathcal{M}^2$ alors $AB \in \mathcal{M}$ mais on n'a pas nécessairement $s(AB) = s(A)s(B)$.
C) Si C est une matrice inversible et $C \in \mathcal{M}$ alors $C^{-1} \in \mathcal{M}$ et $s(C^{-1}) = s(C)^{-1}$.
D) Si C est une matrice inversible et $C \in \mathcal{M}$, on n'a pas nécessairement $C^{-1} \in \mathcal{M}$.

Partie V

Les questions 21 à 26 sont liées. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

21. On démontre, pour tout entier naturel n :
    A) $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$
    A) $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+4}$
    A) $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+5}$
    D) $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$

22. On établit que :
    A) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est croissante et majorée.
    B) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est décroissante et minorée.
    C) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car : $\forall n \in \mathbb{N},\ x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ est continue.
    D) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car : $\forall x \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = 0$.

23. On a :
    A) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+3}$
    B) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$
    C) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$
    D) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+5}$

24. On démontre, par exemple par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
    A) $2(-1)^n I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$
    B) $2(-1)^{n-1} I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k} - \ln(2)$
    C) $2(-1)^{n-1} I_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$
    D) $2(-1)^{n-1} I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$

25. On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
    A) $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
    B) $I_n = \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
    C) $I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
    D) $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

26. On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
    A) $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+7}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2)$
    B) $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2)$
    C) $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+5}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\ln(2)$
    D) $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

Partie VI

Les questions 27 à 30 sont liées. On désigne par j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$.

On considère le système (E) : $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c, \end{cases}$ où a, b, c désignent trois nombres complexes donnés.

27. Le nombre complexe j vérifie :
    A) $j^2=1$
    B) $j^3-1=0$
    C) $1+j+j^2=0$
    D) $1-j-j^2=0$

28. Les nombres complexes x, y, z vérifiant le système (E) sont tels que :
    A) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$
    B) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+b+c$
    C) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj+cj^2$
    D) $3x+(y+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$

29. Le système (E) :
    A) n'admet pas de solution
    B) admet au moins deux solutions
    C) admet une solution unique $x=(a+b+c)/3$, $y=(a+bj^2+cj)/3$, $z=(a+bj+cj^2)/3$
    D) admet une solution unique $x=(a+b+c)/3$, $y=(a+bj+cj^2)/3$, $z=(a+bj^2+cj)/3$

30. Une condition nécessaire et suffisante pour x, y, z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est :
    A) a, b, c réels
    B) a, b, c complexes non réels
    C) a réel et $b=c=0$
    D) a réel et b et c complexes conjugués

Partie VII

Les questions 31 à 36 sont liées.

31. Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante. On note $\alpha=\lim\limits_{+\infty}f$ et $\beta=\lim\limits_{-\infty}f$ qui existent par TLM. On peut montrer :
    A) Pour tout $\gamma\in]\alpha,\beta[$, il existe un unique $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\gamma$
    B) Il existe un unique $x\in]\alpha,\beta[$ tel que $f(x)=x$
    C) Il n'existe pas nécessairement un $x\in]\alpha,\beta[$ tel que $f(x)=x$
    D) Il n'existe pas nécessairement un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=x$

32. Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante. On note $\alpha=\lim\limits_{-\infty}f$ et $\beta=\lim\limits_{+\infty}f$ qui existent par TLM. On peut montrer :
    A) Pour tout $\gamma\in]\alpha,\beta[$, il existe un unique $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\gamma$
    B) Pour tout $\gamma\in]\alpha,\beta[$, il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\gamma$
    C) Il existe un $x\in]\alpha,\beta[$ tel que $f(x)=x$
    D) Il existe un $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=x$

33. On s'intéresse maintenant ̀la fonction tan. On peut montrer :
    A) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\gamma\in\mathbb{R}$, il existe un unique $c_n\in\mathbb{R}$ tel que $\tan(c_n)=\gamma$
    B) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}$ tel que $\tan(x_n)=x_n$
    C) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\gamma\in\mathbb{R}$, il existe un unique $c_n\in\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ tel que $\tan(c_n)=\gamma$
    D) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $x_n\in\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ tel que $\tan(x_n)=x_n$

34. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et $\tan(x_n) = x_n$.
    A) On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} n\pi$
    B) On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}+n\pi$
    C) On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
    D) $(x_n)_n$ n'a pas nécessairement de limite en $+\infty$

35. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et $\tan(x_n) = x_n$.
    A) On a $x_n = n\pi - \arctan(x_n)$
    B) On a $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan(x_n)$
    C) On a $x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
    D) $(x_n - n\pi)_n$ n'a pas nécessairement de limite en $+\infty$

36. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et $\tan(x_n) = x_n$.
    A) On a $\frac{x_n}{n} - \pi - \frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
    B) On a $\frac{x_n}{n} - \pi - \frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\pi}$
    C) On a $nx_n - n^2\pi - \frac{n\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
    D) On a $nx_n - n^2\pi - \frac{n\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{\pi}$

$\boxed{\text{Fin de l'épreuve}}$