Exercices choisis CCP

Ci-dessous la liste d'exercices CCP débloqués cette année, mise à jour du 06/11.

À noter : certains exercices ont dû être légèrement modifiés ou tronqués en fonction de l'avancement du cours *mais je me suis efforcé de faire des modifications ou amputations minimes ne trahissant pas l'esprit de l'exercice*, sinon l'exercice a été écarté.

Liste officielle de 2018 avec les corrigés : http://ccp.scei-concours.fr/cpge/oral/banque_finale_18_avec_corr.pdf.

Historique des ajouts :

- **Entiers naturels** : 3
- TACMAS *Développements limités* : 2 (modifié)
- **Dénombrements** : 112
- **Arithmétique** : 86, 94
- **Complexes** : 31-1, 84, 89
- **Structures** : 66
- **Relations de comparaisons** : 1
- TACMAS *Déterminants* : 63 (sauf 3.)
- **Continuité** : 35

Exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle ACR et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 (modifié)
On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 31-1

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

Exercice 35 (modifié)

$\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels.

1. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et a un point de $\mathbf{R}$.
   On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense de $\mathbf{R}$, et soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 63 (modifié)
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. A est-elle inversible ?

Exercice 66

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x \,\mathcal{R}\, y \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.
On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
2. Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
3. On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau. Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : Procéder par récurrence.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 89
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \mod(17) \\ x & \equiv & 4 \mod(15) \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Prévision des futurs ajouts :

- **Dérivabilité** : 4
- **Suites récurrentes autonomes simples** : 43
- **Suites récurrentes linéaires doubles** : 55
- **Intégration** : 56, 76-79
- **Applications linéaires** : 62 (sauf 2.(a)), 90
- **Sous-espaces affines** : 87
- **Endomorphismes** : 71 (sauf 3.), 83, 88 (sauf 2.(b))
- **AL en dimension finie** : 60, 64, 73
- **Espaces préhilbertiens** : 76 (complet), 77, 79 (complet), 80, 81, 82, 92
- **Séries** : 39 (sauf 2.), 5, 6, 7, 8 (sauf 2.(b)), 46
- **Changements de base, équivalence et similitude** : 59 (sauf 3.), 71 (complet), 72
- **Polynômes** : 85
- **Équations différentielles** : 31-2 (modifié), 42
- **Probabilités** : 101, 105, 107
- **Automorphismes orthogonaux** : 78
- **Variables aléatoires** : 95, 98, 99, 104, 109