Exercices choisis CCP

Ci-dessous la liste d'exercices CCP débloqués cette année, mise à jour du 06/11.

À noter : certains exercices ont dû être légèrement modifiés ou tronqués en fonction de l'avancement du cours *mais je me suis efforcé de faire des modifications ou amputations minimes ne trahissant pas l'esprit de l'exercice*, sinon l'exercice a été écarté.

Liste officielle de 2018 avec les corrigés : http://ccp.scei-concours.fr/cpge/oral/banque_finale_18_avec_corr.pdf.

Historique des ajouts :

- **Entiers naturels** : 3
- TACMAS *Développements limités* : 2 (modifié)
- **Dénombrements** : 112
- **Arithmétique** : 86, 94
- **Complexes** : 31-1, 84, 89
- **Structures** : 66
- **Relations de comparaisons** : 1
- TACMAS *Déterminants* : 63 (sauf 3.)
- **Continuité** : 35
- **Dérivabilité** : 4
- **Dimension finie** : 55, 87
- **Suites récurrentes autonomes simples** : 43
- **Probabilités** : 101, 105, 107
- **Applications linéaires** : 62 (sauf 2.(a)), 90
- **AL en dimension finie** : 59 (sauf 3.), 60, 64.
- **Endomorphismes** : 71.
- **Polynômes** : 85
- **Équations différentielles** : 31-2 (modifié), 42
- **Séries** : 5, 6, 7, 8 (sauf 2.(b)), 46
- **Changements de base, équivalence et similitude** : 72
- **Espaces préhilbertiens** : 39 (sauf 2), 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92
- **Variables aléatoires** : 95, 98, 99, 104, 109
- **Automorphismes orthogonaux** : 78
- **Intégration** : 56

Exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle ACR et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 (modifié)
On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a;b]$ et que f est dérivable sur $]a;x_0[$ et sur $]x_0;b[$
   Démontrer que, si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série. **Indication** : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 6
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : Écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 7

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercice 8 (raccourci)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ converge-t-elle ?

Exercice 31 (modifié)

Les questions peuvent être traitées indépendamment.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$.

Exercice 35 (modifié)

$\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels.

1. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et a un point de $\mathbf{R}$.
   On considère les propositions suivantes :
   P1. f est continue en a.
   P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense de $\mathbf{R}$, et soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 39 (raccourci)
On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans l^2. On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 42
On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
   Déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.

Exercice 46

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 55

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 56

On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 59
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 60
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 62 (raccourci)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3. Dans cette question on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}\big(f + \mathrm{Id}\big) = \mathrm{Ker}\big(f - 2\mathrm{Id}\big)$.

Exercice 63 (modifié)
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. A est-elle inversible ?

Exercice 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

Exercice 66

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x \,\mathcal{R}\, y \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.
On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
2. Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
3. On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau. Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 71

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$

— sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$
— parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 72 (reformulé)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. Existe-t-il une base ε de E dans laquelle la matrice de f est diagonale ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.

On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\ (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : Procéder par récurrence.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\}\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, \ldots, n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!]\ \ b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 89
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système $(S) : \left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & 6 \mod(17) \\ x & \equiv & 4 \mod(15) \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires finies mutuellement indépendantes et de même loi. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 101 (modifié)

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement "l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement "l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement "l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n (on pourra en donner une expression non simplifiée).
3. Comment le résultat de la question 2. peut-il être utilisé pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n ?
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 104

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche », et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.