Option Informatique

Devoir Surveillé n°2

Durée : 1h. Le 06/12/2022.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Description du problème

Dans tout l'énoncé, un même identificateur écrit dans deux polices de caractères diérentes désigne la même entité, mais du point de vue mathématique pour la police en italique (par exemple n) et du point de vue informatique pour celle en romain avec espacement fixe (par exemple `n`).

On rappelle qu'une forme normale conjonctive est une formule logique obtenue par une conjonction de clauses, une clause étant une disjonction de littéraux (et un littéral pouvant être ou bien une variable propositionnelle, ou bien la négation d'une variable propositionnelle).

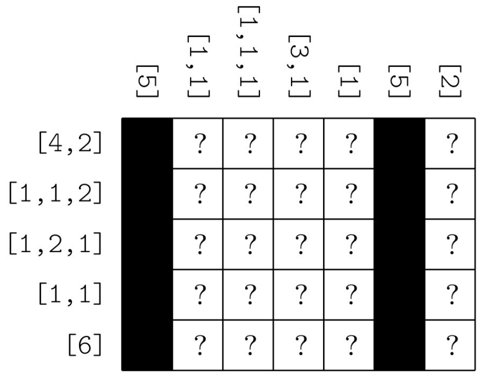
Par ailleurs, les règles choisies ici pour la déduction naturelle sont reproduites en annexe.

Le *Picross* ou *jeu du hanjie* est un jeu de réflexion qui consiste à retrouver une image par le noircissement de certaines cases d'une grille rectangulaire sur la base d'indications laissées sur les côtés de la grille. Pour chaque rangée, qu'elle soit horizontale ou verticale, le joueur dispose d'une suite d'entiers non nuls t_1, t_2, t_3, etc., qui indiquent que la rangée contient une série de t_1 cases noires consécutives, suivie plus loin d'une série de t_2 cases noires consécutives, et ainsi de suite. Un nombre quelconque de cases blanches peut se trouver en tête ou en queue de rangée ; au moins une case blanche sépare deux séries de cases noires.

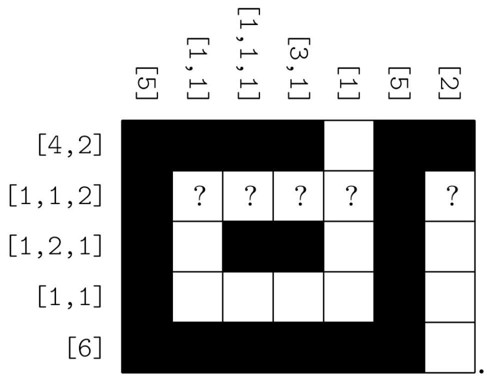
Voici un exemple, que nous résolvons à la main. Une grille vide est fournie ci-contre. Elle est de dimension 5×7. Nous marquons les cases par des symboles « ? » tant que nous ignorons leur couleur.
Nous comptons les rangées à partir de 0, de gauche à droite pour les colonnes et du haut vers le bas pour les lignes.

	[5]	[1,1]	[1,1,1]	[3,1]	[1]	[5]	[2]
[4,2]	?	?	?	?	?	?	?
[1,1,2]	?	?	?	?	?	?	?
[1,2,1]	?	?	?	?	?	?	?
[1,1]	?	?	?	?	?	?	?
[6]	?	?	?	?	?	?	?

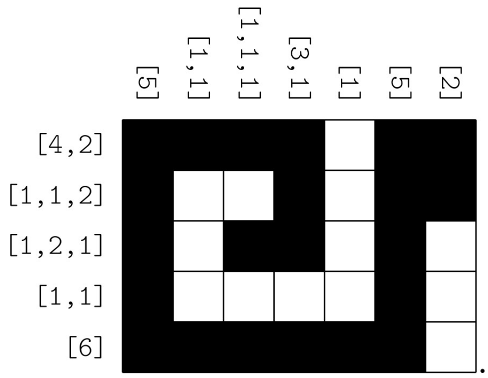
La colonne 0 et la colonne 5 sont de longueur 5. Or l'indication est [5] dans les deux cas. Elles doivent donc chacune contenir 5 blocs noirs consécutifs. Nous les noircissons en totalité.



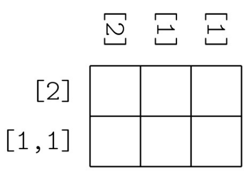
Dans la ligne 0, il n'y a qu'une seule manière de placer un bloc de 4 cases noires puis 2 cases noires. De même, dans la ligne 2, il n'y a qu'une seule manière de positionner le bloc de longueur 2 : il doit se trouver au milieu entre les deux blocs déjà isolés. Dans la ligne 3, nous avons déjà placé deux cases noires : les autres sont donc toutes blanches. Enfin, dans la ligne 4, il n'y a plus qu'une seule manière de placer un bloc de 6 cases noires.



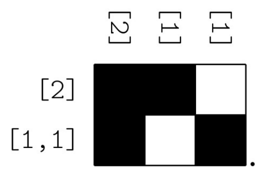
Enfin, en reprenant les indications des colonnes, nous voyons que dans les colonnes 1, 2 et 4, la dernière case inconnue est blanche. Dans la colonne 3 et 6 en revanche, nous devons noircir la dernière case inconnue. Nous avons obtenu une solution de notre hanjie. Elle est unique.



Dans la suite, nous raisonnons avec la logique propositionnelle pour déterminer la couleur de certaines cases. Nous nous concentrons sur le hanjie h_0 défini par



et dont une solution est la suivante :



Q.1. Établir, par raisonnement en langue française, que la solution du hanjie h_0 est unique.

Nous introduisons six variables booléennes, nommées x_0, x_1, …, x_5, et correspondant aux cases ci-contre. Nous associons la valeur de vérité V (vrai) à la couleur noire et F (faux) à la couleur blanche.

x_0	x_1	x_2
x_3	x_4	x_5

Soit L_0 le prédicat : « l'indication de la ligne zéro du hanjie h_0 est satisfaite ».

Q.2. Dresser la table de vérité du prédicat L_0 portant sur les variables x_0, x_1, x_2. En déduire une formule de logique φ sous forme normale conjonctive qui décrit le prédicat L_0.

Soit C_1 le prédicat : « l'indication de la colonne du milieu du hanjie h_0 est satisfaite ».

Q.3. Dresser la table de vérité du prédicat C_1 portant sur les variables x_1 et x_4. En déduire une formule de logique ψ sous forme normale conjonctive qui décrit le prédicat C_1.

On le redit, les règles d'inférence de la déduction naturelle choisies pour cette épreuve sont rappelées en annexe.

Q.4. Construire un arbre de preuve qui démontre le séquent $\psi \vdash x_1$ à partir des règles d'inférence de la déduction naturelle données en annexe.

Q.5. Construire de même un arbre de preuve qui démontre le séquent $\psi, x_1 \vdash \neg x_4$.

Nous notons ψ' la formule de logique obtenue à partir de ψ en remplaçant la variable x_1 par x_2 et la variable x_4 par x_5.

Évidemment, ψ' représente C_2 !

Q.6. Démontrer qu'il n'existe pas d'arbre de preuve qui démontre la formule $\varphi \wedge \psi' \to \neg x_2$.

Annexe

Dans les tableaux suivants, la lettre Δ désigne un ensemble de formules de logique ; les lettres A, B et C désignent des formules de logique.

Axiome
$\dfrac{}{\Delta, A \vdash A}\ (\mathrm{ax})$

	Introduction	Élimination
$\to$	$\dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\ (\to\mathrm{i})$	$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\ (\to\mathrm{e})$
$\wedge$	$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\mathrm{i})$	$\dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\mathrm{e})$ $\dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\mathrm{e})$
$\vee$	$\dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee\mathrm{i})$ $\dfrac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee\mathrm{i})$	$\dfrac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee\mathrm{e})$
$\neg$	$\dfrac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg\mathrm{i})$	$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg\mathrm{e})$