Démonstrations en logique propositionnelle : déduction naturelle, calcul des séquents.

Vérité vs démontrabilité

Rappel de première année : pour savoir si une formule propositionnelle f est *sémantiquement vraie*, on peut dresser sa table de vérité et observer que toutes les valuations en sont des modèles (elle prend la valeur de vérité V dans toutes les valuations).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un autre problème, mais qu'on espère lié au précédent : une formule propositionnelle est-elle *démontrable ?* On espère que c'est lié ! On espère qu'une formule propositionnelle est démontrable si et seulement si elle est sémantiquement vraie. Mais pour répondre, il va falloir :

1. Expliquer ce que signifie démontrable. Et il y a plusieurs bonnes réponses possibles à cette question.
2. Étudier si notre notion de démontrabilité a bien les mêmes propriétés que notre notion de vérité sémantique.
3. Et enfin, s'intéresser aux deux implications possibles entre démontrabilité et vérité sémantique.

Concernant le point 1. : les trois présentations de la démontrabilité les plus employées sont la *déduction naturelle*, le *calcul des séquents*, et les *systèmes de Hilbert*. Ces trois présentations possibles donnent heureusement lieu à la même notion de formule démontrable. Dans ce chapitre, on étudiera seulement la première et on essaiera de traiter la seconde en TP (leur avantage sur la troisième est qu'on peut plus facilement identifier les règles de démonstration qui rendent la logique classique et donc, en les retirant, obtenir la logique intuitionniste).

Concernant le point 2. : pour illustrer, voici une propriété vues pour la notion de vérité sémantique. C'est le *théorème de la conséquence logique* :

- Soient f et g deux formules. On dit que <u>g est conséquence logique de f</u>, et on note $f \models g$ lorsque tout modèle de f est un modèle de g.
- Plus généralement, soit $\Gamma = \{f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n\}$ un ensemble de formules et g une formule.
  On dit que <u>g est conséquence logique de Γ</u>, et on note $\Gamma \models g$ lorsque toute valuation qui est un modèle de f_1, …, f_{n-1} et f_n est aussi un modèle de g.

On aimerait que cette règle ait un équivalent pour notre notion de démontrabilité.

Concernant le point 3. : on va évidemment montrer que toute formule démontrable est sémantiquement vraie (théorème de *correction*, ou de *consistance*). La réciproque est vraie aussi (théroème de *complétude*), mais en retirant les règles qui rendent la logique classique, elle n'est plus vraie sauf à changer notre notion de vérité sémantique.

I Déduction naturelle

I.1 Séquent de la déduction naturelle

Au cours d'une démonstration, on dispose d'un ensemble d'hypothèses pour montrer une conclusion souhaitée.

Définition 1 : Séquent de la déduction naturelle

On appelle <u>séquent de la déduction naturelle</u> un couple (Γ, f), noté dans la suite <u>$\Gamma \vdash f$</u>, où Γ est un ensemble fini de formules propositionnelles et f une formule, obtenu à l'aide des règles décrites en I.2.

Le séquent $\Gamma \vdash f$ peut se lire "Γ prouve f" et correspond au fait qu'à partir des formules de Γ, appelé *le contexte* du séquent, on peut déduire la formule f, appelée *la conclusion* du séquent.

Notation 1 Pour $\Gamma = \{h_1, \dots, h_n\}$, on pourra plus simplement noter $f_1, \dots f_n \vdash f$ plutôt que $\{h_1, \dots, h_n\} \vdash f$.

En particulier on notera $\vdash f$ pour $\emptyset \vdash f$, et cela correspond au fait que f est démontrable sans hypothèse. On dira alors simplement que f est démontrable.

À bien garder en tête : Γ est un ensemble (donc non ordonné) : ainsi, pour tout $\sigma \in S_n$, le séquent $f_{\sigma(1)}, \dots f_{\sigma(n)} \vdash f$ **est le même** que le séquent $f_1, \dots f_n \vdash f$.

Enfin, toujours pour $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$, on pourra noter $\Gamma, f_{n+1} \vdash f$ pour $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \vdash f$.

Remarque 1 : On note bien sûr la similarité de la notation avec $\Gamma \models f$, qui signifie que f est (sémantiquement) une conséquence logique de Γ.

La question qu'on se pose est donc : les (méta-)énoncés $\Gamma \vdash f$ et $\Gamma \models f$ sont-ils équivalents ?
Il faut expliquer comment on peut obtenir un séquent de la déduction naturelle $\Gamma \vdash f$ pour pouvoir répondre !

I.2 Règles d'inférence de la déduction naturelle

Les règles indiquent comment, une fois obtenus certains séquents, on peut en obtenir d'autres. Une règle se compose :

- d'un ensemble (éventuellement vide) de *prémisses* qui sont des séquents (supposés dèjà obtenus) ;
- d'une *conclusion* qui est un séquent (la règle indique qu'on peut le déduire des prémisses) ;
- d'un *nom* ; on fait figurer les prémisses au dessus d'un trait, la conclusion en dessous du trait, et le nom à côté du trait.

I.2.1 Règles élémentaires

Axiome : cette règle indique que si la conclusion du fait partie des hypothèses, alors on obtient un séquent.

$$\frac{}{\Gamma, f \vdash f}\text{ax}$$

Affaiblissement : en rajoutant des hypothèses, les énoncés prouvables restent prouvables.

$$\frac{\Gamma \vdash f}{\Gamma, g \vdash f}\text{aff}$$

I.2.2 Implication

Introduction de → : c'est l'analogue du théorème de la conséquence logique.

$$\frac{\Gamma, f \vdash g}{\Gamma \vdash f \to g}\ \to_i$$

Élimination de → : c'est le *modus ponens*.

$$\frac{\Gamma \vdash f \to g \quad \Gamma \vdash f}{\Gamma \vdash g}\ \to_e$$

I.2.3 Conjonction

Introduction de ∧ : pour montrer $f \wedge g$, il suffit de montrer f et de montrer g.

$$\frac{\Gamma \vdash f \quad \Gamma \vdash g}{\Gamma \vdash f \wedge g}\wedge_i$$

Élimination de ∧ : de $f \wedge g$ on peut déduire f et on peut déduire g.

$$\frac{\Gamma \vdash f \wedge g}{\Gamma \vdash f}\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash f \wedge g}{\Gamma \vdash g}\wedge_e^d$$

I.2.4 Disjonction

Introduction de ∧ : pour montrer $f \vee g$, il suffit de montrer f ou de montrer g.

$$\frac{\Gamma \vdash f}{\Gamma \vdash f \vee g}\vee_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash g}{\Gamma \vdash f \vee g}\vee_e^d$$

Élimination de ∨ : cela correspond au raisonnement par disjonction des cas.

$$\frac{\Gamma \vdash f \vee g \quad \Gamma, f \vdash h \quad \Gamma, g \vdash h}{\Gamma \vdash h}\vee_e$$

I.2.5 Négation

Introduction de ¬ : c'est l'aspect intuitionniste du raisonnement par l'absurde. Pour montrer $\neg f$ il suffit de montrer que f entraîne une contradiction.

$$\frac{\Gamma, f \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg f}\neg_i$$

Élimination de ¬ : on ne peut pas avoir simultanément f et $\neg f$.

$$\frac{\Gamma \vdash f \quad \Gamma \vdash \neg f}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

Absurdité classique : c'est l'aspect non intuitionniste du raisonnement par l'absurde. Pour montrer f il suffit de montrer que $\neg f$ entraîne une contradiction.

$$\frac{\Gamma, \neg f \vdash \bot}{\Gamma \vdash f}\neg_c$$

Cette règle peut être remplacée, de façon équivalente, par le tiers exclus ou encore d'autres variantes : c'est **la** règle qui est contestée par les intuitionnistes.

I.3 Ensemble des séquents de la déduction naturelle

Définition 2

L'ensemble des séquents de la déduction naturelle est l'ensemble défini par induction à partir des règles d'inférence vues en I.2.

Comme tout ensemble inductif, l'ensemble des séquent peut être vu comme un ensemble d'arbres.

Exemples 1 : Écrivons quelques arbres de preuve, en commençant par les deux séquents donnés en exemple dans le programme.

I.4 Sous-arbres de preuve, nouvelles règles et non unicité des règles

Comme les arbres de preuve ont tentance à déborder de partout, on peut synthétiser un sous-arbre, précédemment établi, en donnant un nom à la *dérivation* obtenue précédemment.

Ainsi, on a obtenu dans les exemples précédents les dérivations suivantes :

$\dfrac{}{p \to q, q \to r \vdash p \to r}\text{barbara}$ $\dfrac{}{p \to q \vdash \neg q \to \neg p}\text{contrap}_i$ $\dfrac{}{\neg q \to \neg p \vdash p \to q}\text{contrap}_c$ $\dfrac{}{\vdash p \to q \to \neg(p \wedge \neg q)}\text{vnapojti}$

(Elles sont sans prémisses mais on pourrait obtenir des dérivations avec prémisses.)

Il n'y a pas unicité des règles présentées dans la section I.2, d'autres choix de dérivations auraient donné lieu aux mêmes séquents valides. Ce résultat n'est pas très important *en soi*, mais il invite à la méfiance : dans un sujet de concours, les règles d'inférences devraient être précisées mais pourraient légèrement différées de celles que l'on a vu plus haut.

À titre d'exemple, j'ai déjà mentionné qu'on aurait pu remplacer la règle de raisonnement par l'absurde classique par la règle d'elimination de la double négation $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg f}{\Gamma \vdash f}\neg\neg_e$ ou par le le tiers exclus $\dfrac{}{\Gamma \vdash f \vee \neg f}\text{te}$.
Contentons-nous de montrer le sens direct, à savoir que ces deux dérivations sont bien valides sous les règles précédentes :

Pour la double négation :

Pour le tiers-exclus :

Exercice pénible : laquelle des 4 lois de De Morgan nécessite le tiers exclus ? La montrer.

II Correction et complétude

On va maintenant montrer que les règles de démonstration qu'on a vues précédemments sont *correctes* et *complètes*, c'est-à-dire qu'on a $\Gamma \vdash f$ si et seulement si on a $\Gamma \models f$.

On rappelle que $\Gamma \models f$ signifie que toute valuation qui est un modèle des formules de Γ est aussi un modèle de f, c'est-à-dire que toute distribution de valeurs de vérité qui rende vraie toutes les formules de Γ rend vraie f. En particulier, $\models f$ signifie que f est une tautologie, et comme $\vdash f$ signifie que f est démontrable sans hypothèse, l'équivalence qu'on va montrer implique en particulier qu'une formule propositionnelle est démontrable si et seulement si c'est une tautologie.

II.1 Correction

Théorème 1

Soit Γ un ensemble fini de formules propositionnelles et f une formule propositionnelle.
Si on a $\Gamma \vdash f$ alors on a $\Gamma \models f$.

Autrement dit : toute formule démontrable est vraie (au sens : sémantiquement égale à $\top$).

Ce théorème s'appelle *théorème de correction* dans notre programme, dans la littérature il peut s'appeler *théorème de consistance* (parfois : *de cohérence*). Pour le démontrer, on va se rappeller que les séquents sont définis par induction !

Démonstration.

II.2 Complétude

On s'intéresse maintenant à la réciproque : les formules propositionnelles vraies sont-elles toutes démontrables ?

Ce sens n'est pas au programme, mais pourrait faire l'objet d'un exercice de concours : il semble raisonnable d'en avoir au moins vu une fois une stratégie de démonstration.

On commence par vérifier qu'un théorème important vu pour $\models$ (le théorème de la conséquence logique) a bien son analogue pour $\vdash$ (théorème de la déduction) :

Proposition 1 : théorème de la déduction

Soit $\Gamma = \{f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n\}$ un ensemble de formules et g une formule.
On a $\Gamma \vdash g$ si et seulement si $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \vdash f_n \to g$.

Démonstration. Le sens direct est par définition la règle d'introduction de l'implication.

La réciproque n'est pas plus compliquée : supposons que $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \vdash f_n \to g$ soit un séquent valide.

Alors $\Gamma \vdash g$ l'est aussi avec l'arbre de preuve suivant : $\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \vdash f_n \to g}\,\text{hyp}}{\Gamma \vdash f_n \to g}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash f_n}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash g} \to_e$.

Corollaire 1 : réducation à un cas particulier

Si, pour toute formule f, $\vdash f$ implique $\models f$, alors, pour toute formule g et tout ensemble fini de formules Γ, $\Gamma \vdash g$ implique $\Gamma \models g$.

Démonstration. Il suffit de spammer le théorème de la déduction et le théorème de la conséquence logique.

Supposons que, pour toute formule f, $\vdash f$ implique $\models f$.

Soit $\Gamma = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un ensemble de formules propositionnelles et g une formule propositionnelle. Supposons $\Gamma \vdash g$, *i. e.* $g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n \vdash g$. J'applique n fois le théorème de la déduction, j'obtiens $\vdash g_1 \to g_2 \to \cdots \to g_n \to g$ (rappel : l'implication associe à droite). J'applique l'hypothèse avec $f = g_1 \to g_2 \to \cdots \to g_n \to g$: $\models g_1 \to g_2 \to \cdots \to g_n \to g$. Enfin j'applique n fois le théorème de la conséquence logique, j'obtiens $g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n \models g$, *i. e.* $\Gamma \models g$.

Résumons : pour montrer le *théorème de complétude*, c'est-à-dire que $\Gamma \vdash f$ implique toujours $\Gamma \models f$, il suffit de montrer que toute formule démontrable sans hypothèse est bien une tautologie.

Dans la suite, on se fixe une formule f. On note v_1, ..., v_n les variables propositionnelles qui apparaissent dans f.

Définition 3

Pour toute valuation ν, on note $h(\nu)$ la formule $\varepsilon(v_1) \land \varepsilon(v_2) \land \ldots \land \varepsilon(v_n)$ où $\varepsilon(v_i) = v_i$ si $\nu(v_i) = V$ et $\varepsilon(vi) = \neg v_i$ si $\nu(vi) = F$.

Remarque 2 : On connaît déjà cette formule $h(\nu)$: en effet, c'est une formule qui traduit sur quelle ligne de la table de vérité de f on se trouve. On a vu l'an dernier que la forme normale disjonctive complète de f s'obtient précisément en formant la disjonction des $h(\nu)$ pour toutes les valuations ν qui sont des modèles de f.

Lemme 1

Si $\nu(f) = V$ alors $\vdash h(\nu) \to f$ et si $\nu(f) = F$ alors $\vdash h(\nu) \to \neg f$.

Démonstration. On va le montrer par induction. Plus précisément, on va montrer que ce résultat est vrai pour toute formule f n'ayant pas d'autres variables propositionnelles que v_1, ..., v_n, par induction sur la hauteur de f (l'ensemble des formules étant défini par induction, on peut voir les formules comme des arbres, elles ont donc une hauteur).

Corollaire 2 : $\vdash f$ *implique* $\models f$

Démonstration. Expédions une récurrence sur n, le nombre de variables propositionnelles intervenant dans f.

Avec le corollaire 1, on a donc établi le théorème de complétude.